

有自由面渗流分析的初流量法

张有天 陈平 王镭

(水利水电科学研究院)

提 要

自由面渗流分析的传统方法是自由面作为可动边界处理.这种方法对有接近水平分层不同渗透介质的计算域不能适用,而且不能用同一网格计算渗流场及渗流应力.参照非线性应力问题中的初应力法,作者建议了用固定边界求解有自由面渗流问题的初流量法,成功地解决了传统方法的重大缺陷.本文对方法原理作了简要叙述并给出一个绕坝渗流分析的例题.

一、概 述

土坝渗流、混凝土坝坝体渗流、各种闸坝的绕坝渗流、边坡渗流、地下水运动、地下洞室渗流等都有渗流自由面.由于自由面的位置是待求的,因而这类渗流分析是非线性问题.这类具有自由面渗流问题传统的有限元分析方法是自由面当作可变边界处理,在迭代过程中修改自由面位置,使网格发生相应变形,直到自由面位置稳定为止^[1,2].这一方法虽被成功地应用于渗流问题的分析,但在应用实践中遇到了许多难以解决的问题.方法本身也存在着重大缺陷,主要有以下几方面:

(一)每一迭代步计算网格都要随自由面的变动而变动,总体传导矩阵要重新计算和分解,需要大量计算机时.

(二)当初始自由面位置与最终自由面相差较大时,将使网格因过分变形而致畸形,影响解题的精度,以致在计算过程中常要对网格重新剖分.

(三)在自由面附近渗流介质为不均质,特别是有水平分层不同渗流介质时(这种情况在岩体渗流问题中经常遇到),程序处理十分困难.

(四)渗流分析的主要目的是给出渗流荷载,以便分析渗流荷载的应力场,对建筑物及其基础的稳定作出评价.应力分析要包括渗流自由面以上区域,因而不能用同一网格连续进行渗流分析和应力分析.这就极大地增加了有自由面渗流场应力分析的工作量.

为解决上述问题,国外一些学者致力于研究有自由面渗流问题新的算法,这些算法的核心是在计算过程中不变网格. Neuman于1973年提出用不变网格分析有自由面渗流的Galerkin方法^[3]. Desai于1976年提出剩余流量法^[4,5],并于1983年发展到用于计算不稳定流^[6]. 1973年Baocchi基于变分不等式概念建议了新算法^[7],后来Oden^[8]及Bruch^[9]又作了进一步发展. Bathe^[10]、Steven^[11]、Aral^[12]、Lam^[13]、Gell^[14]等人在这方面都有所贡献.李春华提出用不变网格法分析有自由面二维渗流^[15],补充推导了公式,并给出算例.

在上述研究的基础上,引用与非线性应力分析中类似于初应力的概念,提出分析有自由面渗流的初流量法.通过对初流量值的调整,将非线性分析转换成一系列的线性分析,

了程序, 给出二维及三维例题. 迭代过程保持计算网格和总体传导矩阵不变, 基本解决了有自由面渗流分析存在的问题.

二、现行主要方法评价

(一) 剩余流量法

如图 1 所示的土坝渗流, 按剩余流量法计算步骤为:

(1) 对土坝全域剖分网格, B_1 , B_2 两边界上给定水头. 按有限元方法求得结点水头 $\{h_i\}$.

(2) 沿结点连线上寻找 $h = x_2$ 的点 (x_2 为位置水头), 该点可由求得的结点水头值内插. 这些点便构成自由面的近似位置.

(3) 如果自由面上法线方向的流速 $V_n = \partial h / \partial n = 0$, 该自由面即为最终自由面, 否则应按以下步骤进行调整.

(4) 按下式求剩余结点流量

$$\{Q_{r,i}\} = \iiint_{\Omega} [N]^T \{q_{r,i}\} d\Omega \quad (1)$$

式中: $[N]$ 为单元形函数; $\{q_{r,i}\}$ 为流过近似自由面的剩余流量

$$\{q_{r,i}\} = \{V_{n,i}\} A, \quad (2)$$

而

$$\{V_{n,i}\} = -[k][B]\{h_i\}, \quad (3)$$

其中 $[k]$ 为渗透张量; $[B]$ 为几何矩阵; A 为单元内自由面的表面积; i 为迭代次序数.

(5) 以 $\{Q_{r,i}\}$ 作为右端项求解

$$[K]\{\Delta h_{r,i}\} = \{Q_{r,i}\}, \quad (4)$$

式中: $[K]$ 为总体传导矩阵.

(6) 求第 $i+1$ 迭代步的水头值

$$\{h_{i+1}\} = \{h_i\} + \{\Delta h_{r,i}\} \quad (5)$$

(7) 重复第 (2) 步计算, 直到第 (3) 步基本满足为止.

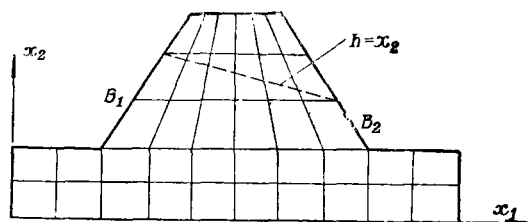


图 1 剩余流量法计算简图

(二) 单元传导矩阵调整法

Bathe 所建议的方法是将全域剖分成单元, 在自由面以上的各单元, 其渗透系数 $k = 0$. 但为了计算稳定性, 自由面以上单元渗透系数给一小值, Bathe 建议 (图 2)

当 $h \geq x_2$ 时, $k = k$;

$h < x_2$ 时, $k = k/1000$.

首先, 按全域均为实际渗透系数 k 建立总体传导矩阵 $[K]$

$$[K] = \sum_{e=1}^n \iiint_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}]^T [k^{(e)}] [B^{(e)}] d\Omega^{(e)}, \quad (6)$$

式中： e 为单元号； n 为单元总数。

求解方程组得各结点水头值。将结点水头小于位置水头的单元按渗透系数为原渗透系数的1/1000重新计算单元传导矩阵并组成总阵，求解出结点水头。直到两次计算结点水头值相差小于某一允许值为止。

Bathe建议，可根据解题性质，事先判断某一单元区将必然在水面线以下，则在迭代过程中不必对这些单元进行检查以节省机时。

李春华^[16]在Bathe方法基础上对二维有自由面渗流问题作了进一步改进。在每次求得结点水头值后，找出结点连线上自由面的位置。对自由面穿过的单元按复合材料单元，即自由面以下渗透系数为 k ，而自由面以上渗透系数按 $k/1000$ 求单元传导矩阵（图3），并给出了不同情况单元传导矩阵的计算公式。



图2 自由面计算渗透模型

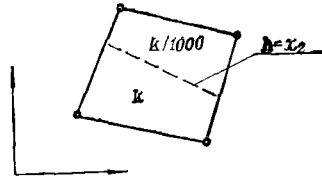


图3 复合材料单元

以上方法虽然都是可行的，但在计算上很不方便。两种方法都必须在每一迭代步确定自由面的具体位置，Desai法要计算单元内自由面的面积，法向流速分布。由于自由面与单元相交有许多不同情况，程序应能对各种可能情况作出判断，确定属于何种情况，再按该情况计算单元内自由面面积及其法线方向，工作量太大。这两种方法难以用于三维问题，因而有自由面渗流问题三维有限元分析一直未能得到较好解决。

三、有自由面渗流分析的初流量法

（一）渗流问题基本方程及边界条件

1. 渗流问题基本方程 各向异性渗透介质的达西定律可表示为

$$v_i = -k_{ij} h_{,j} \quad (7)$$

式中： v_i ——单位面积通过的流量； k_{ij} ——渗透张量； $h_{,j}$ ——水头梯度， $h = x_2 + P/\gamma$ ， x_2 ——位置水头； P ——水压力； γ ——水的容重。

对不可压缩流体，且域内有密度为 q_0 的体积源时，其连续方程为

$$v_{i,i} - q_0 = 0, \quad (8)$$

将式（7）代入式（8）可得渗流问题偏微分方程

$$k_{ij} h_{,ij} + q_0 = 0. \quad (9)$$

2. 边界条件 对于稳定渗流问题，其边界条件有以下3种（图4）：

（1）给定水头和位置，法向流速为未知。如 ae 边 $h = h_a$ ， cd 边 $h = h_d$ ， bc 边 $h = x_2$ ；

（2）给定法向流速和位置，水头为未知。如 ed 边 $v_n = 0$ ；

(3) 已知法向流速 ($v_n = 0$) 及水头 ($h = x_2$), 位置为未知, 如 ab . ab 称自由面边界,

对有自由面的渗流问题, 由于其位置需迭代求解, 因而非线性渗流问题.

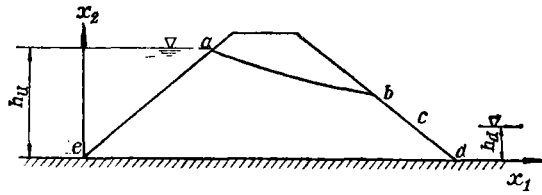


图 4 渗流计算域边界条件

(二) 渗流问题的有限元方法

由给定的边界条件可由式 (9) 求得渗流水头函数. 根据变分原理, 它等价于下述泛函的极值问题:

$$F(h) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} k_{ij} h_{,i} h_{,j} - q_0 h \right] d\Omega + \int_{\Gamma} q h d\Gamma = \text{Extremum}, \quad (10)$$

式中: q 为边界 Γ 上通过单位面积的流量; q_0 为域内源密度.

将求解域 Ω 剖分为 n 个单元, 单元内的水头按其结点水头插值:

$$h(\eta) = \sum N^l(\eta) h^l, \quad (11)$$

式中: N ——单元形函数; η ——母单元的局部坐标, 二维问题为 (η_1, η_2) , 三维问题为 (η_1, η_2, η_3) ; l ——单元的结点顺序号.

对式 (10) 取其变分为零, 可得:

$$\sum_{e=1}^n [K]^e \{h\}^e + \{Q\}^e = 0, \quad (12)$$

式中: $[K]^e$ 为 e 单元传导矩阵,

$$[K]^e = \int_{\Omega_e} [B^e]^T [k^e] [B^e] d\Omega_e; \quad (13)$$

$[B]$ 为单元的几何矩阵, 当单元结点数为 m 时,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N^m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \frac{\partial N^1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial N^m}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_3} & \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N^m}{\partial x_3} \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$\{Q\}^e$ 为边界上的分布流量和域内的体积源的等效结点流量, 相当等于弹性问题中的结点力.

将各单元传导矩阵、结点流量进行集合, 可得代数方程组:

$$[K] \{h\} = \{Q_0\}. \quad (15)$$

解式 (15) 可求得各结点的水头值.

当部分边界上给定水头, 可将该结点的方程删去, 并将其它方程中已知水头与总体传导矩阵 $[K]$ 中相关系数的乘积移到方程式的右端, 形成新的结点流量 $\{Q_1\}$, 方程式 (15) 将为

$$[\tilde{K}]\{h\} = \{Q_0\} - \{Q_1\} = \{Q\}, \quad (16)$$

(三) 渗流非线性分析的初流量法

1. 初流量的概念 对于有压渗流, 因不存在自由面, 边界位置均为确定, 式(16)中的传导矩阵 $[\tilde{K}]$ 及右端项 $\{Q\}$ 及 $\{Q_1\}$ 均可求得. 求解方程组(16)是线性问题. 但如边界条件中有自由面边界, 其位置不确定. 如按Desai法求解, 则右端项不确定, 如按Bathe法求解, 则总体传导矩阵不确定(当然也可转化为总体传导矩阵确定, 但右端项不确定问题), 只有通过逐次迭代才能求得自由面的正确位置, 因而是一个非线性问题.

前已述及Desai法及Bathe法存在的问题. Gell于1984年在Desai法基础上提出了改进剩余流量法^[14], 这一改进方法基本上解决了上述问题, 且较容易有自由面三维渗流分析. 本文在这一解法的基础上作了某些改进, 并从理论上作了完整的阐述.

由达西定律可知, 单位流量与水头梯度有线性关系式(7). 由于自由面位置为未知, 在每一个迭代步所求得的只是符合 $h=x_2$ 条件的自由面近似位置, 它不满足法向流量为零的条件. 为了符合 $q_n=0$ 的条件, 线性关系式(7)可用具有初流量 q_i 来表示:

$$q_i = -k_{ij}h_{,j} + q_i^0. \quad (17)$$

调整 q_i^0 , 俾使满足 $h=x_2$ 近似自由面处的单位流量 $q_n=0$ 的条件. 这样便将非线性分析简化为调整初流量值的一系列线性分析.

2. 初流量及其结点流量计算 现以二维问题为例来说明初流量与其结点流量的计算. 这一计算方法可直接推广用于三维自由面渗流问题.

图5为一土坝, 要求解其渗流场. 用初流量法计算, 不必事先假定自由面, 可对全域 Ω 进行单元剖分. Ω 的边界 Γ 上的边界条件为:

$$\begin{aligned} ac: h=h_a; \quad cd: h=h_d; \\ ed: v_n=0; \quad bc: h=x_2; \end{aligned}$$

ab 边的边界条件可任意给定, 例如可按流线条件给定 $q_n=0$. b' 点为自由面与逸出面的交点, 其位置是待求的. b' 点可根据具体题目确定其变化范围. 如图5的情况, b' 点的变化范围应为 bc 边, 称 bc 边为可能的逸出面.

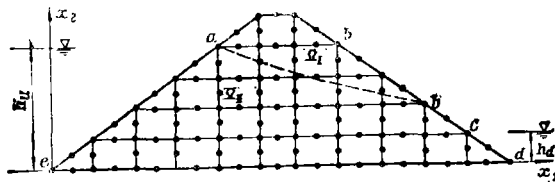


图5 初流量法计算简图

按单元剖分及上述边界条件建立代数方程组(16). 对传导矩阵 $[\tilde{K}]$ 进行分解后保存备用. 由初始右端项 $\{Q\}$ 回代求得结点水头 $\{h\}$. 按 $h=x_2$ 的条件, 求自由面的近似解. 对每个单元(或每个可能被自由面穿越的单元以及自由面以上的单元)逐个高斯点计算水头值, 当 $h < x_2$, 即说明该高斯点位于自由面之上; 若 $h > x_2$, 则该点位于自由面以下. 于是自由面的近似位置即可确定, 当这个面上同时又满足法向流量 q_n 等于零的条件, 这个近似自由面即为所要求的自由面. 它将求解域 Ω 分为两个子域 Ω_I 及 Ω_{II} , 自由面是 Ω 及 Ω_{II} 的区界, 它对两个域都应是一条流线. 对于整个域 Ω 求解等价于对 Ω_{II} 子

域的求解。

对每个可能包含自由面的单元，逐个高斯点 (η_i, η_j) 计算水头，当计算水头值小于其位置水头时，按下式计算它对该单元各结点初流量的贡献。

$$\{Q\}^e = -[B(\eta_i, \eta_j)]^T [k][B(\eta_i, \eta_j)][h]^e. \quad (18)$$

3. 初流量法的迭代格式 依次对 $h < x_2$ 的所有高斯点求得各结点累计结点流量（即结点初流量 $\{Q_i^r\}$ ），以其作为右端项求得水头增量，即

$$[\tilde{K}]\{\Delta h^r\} = \{Q_i^r\}. \quad (19)$$

则 $r+1$ 次迭代的水头为

$$\{h^{r+1}\} = \{h^r\} + \{\Delta h^r\}. \quad (20)$$

重复求新的自由面，求 $\{Q_i^{r+1}\}$ ，直到对由 I 区各高斯点求得的初流量 $\{Q_i\}$ 绝对值均小于某一允许值时，迭代过程收敛， $h = x_2$ 的面即为所求的自由面。

这一方法的基本思想是将计算域 Ω 以 $h = x_2$ 为界分成两个子域，为保证两个子域之间没有流量交换，在 Ω_I 区求各高斯点形成的结点初流量，以此作为域内源来逐步减小 $h = x_2$ 面上的流量交换。由于域内源 $\{Q_i\}$ 加在 Ω_I 区，而实际要求解的域是 Ω_{II} ，亦即 Ω_{II} 域内未加域内源，故不对 Ω_{II} 域内的解有影响。

顺便说明，对 Ω_{II} 内某些结点，例如图5中的 a 点，将因 Ω_I 域内高斯点的贡献而有初流量值，但这一初流量仅代表 Ω_I 域内高斯点的贡献，实际上不代表 Ω_{II} 域内有不为零的初流量，故不致影响解题的正确性，而仅对解的精度有影响，当单元尺寸逐渐减小， Ω_{II} 域内出现不为零的结点初流量将更为靠近两个区的区界，对解的精度影响也将逐渐减小。

4. 初流量法的若干说明

(1) 收敛标准 在迭代计算过程可按下述标准中的一个或几个来判断收敛与否；结点初流量最大绝对值小于某一允许量； $h = x_2$ 的自由面稳定，若干次迭代 $h < x_2$ 的高斯点总数保持不变； Ω_{II} 区结点水头增量 Δh 最大绝对值小于某一允许值。

以上三个标准中宜同时采用后两个作为控制标准。因为结点流量的大小在概念上不直观，故不宜作为收敛标准。

(2) 溢出面的处理 图5的 bc 为可能溢出面，它的边界条件为 $h = x_2$ ，因此，可能溢出面上处处满足自由面的水头条件，因而很难确定逸出点 b' 的位置。同时逸出点以上均有较高的水头，使收敛速度受影响。为了改进，可采用如下处理方法。

设第 r 次迭代实际逸出点为 b' ，在 b' 点以上边界结点流量为负值（向域内流）， b' 以下边界各结点的流量为正值（向域外流），以此判断 b' 点的位置。将 b' 以上逸出面上各结点的水头减小 $\Delta h^{(r)} = 0.05h^{(r)}$ 。水头减小后，应对实际右端项进行相应地修正。

(3) 自由面位置 迭代收敛后， $h = x_2$ 的面即为所求的自由面。可根据结点连线的水头函数关系计算 $h = x_2$ 具体点的位置。

(a) 对线性单元（图6） 已知 $h(1) < x_2(1)$ ， $h(2) > x_2(2)$ ，令 $\Delta_1 = h(1) - x_2(1)$ ； $\Delta_2 = h(2) - x_2(2)$ ，则自由面穿过此边上 a 点，其高程为
$$x_2(a) = x_2(2) + [x_2(1) - x_2(2)]\Delta_1 / (\Delta_1 - \Delta_2). \quad (21)$$

(b) 二次单元 已知自由面穿过132边（图7），令

$$\Delta_1 = h(1) - x_2(1); \quad \Delta_2 = h(2) - x_2(2); \quad \Delta_3 = h(3) - x_2(3).$$

自由面与132边交点为 a 点，其局部坐标 η 值可由下面的方程式求解

$$(\Delta_1 + \Delta_2 - 2\Delta_3)\eta^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)\eta + 2\Delta_3 = 0 \quad (22)$$

求得 η 值后, 该点的高程为

$$\mathfrak{X}_i(\eta) = N^{(1)}(\eta)x_i(1) + N^{(2)}(\eta)x_i(2) + N^{(3)}(\eta)x_i(3). \quad (23)$$

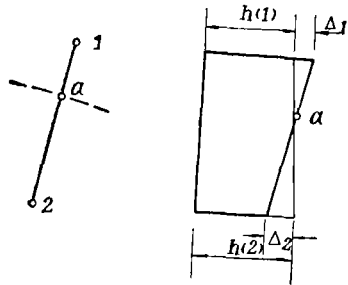


图 6 线性单元

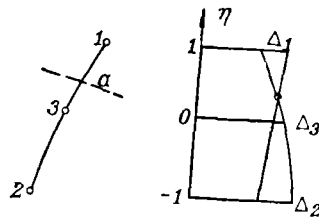


图 7 二次单元

四、算 例

(一) 如图 8 的二维渗流场, 可由文献[15]按图解解析法求得自由面位置(见图中实线)。

将求解域分成 60 个 4 结点单元, 按初流量法对自由面位置进行迭代计算, 14 次迭代自由面水头最大差值 0.2m(见图 8 中虚线)。除尾部有一定差别外, 数值解与理论解符合较好。

图 9 为同一计算域, 但系两种渗透介质, 设前半部渗透系数为 k , 后半部渗透系数为 k_1 。当 $k_1 = 10k$, 按初流量法求得自由面为图中实线; 当 $k_1 = 100k$, 自由面为图中虚线。

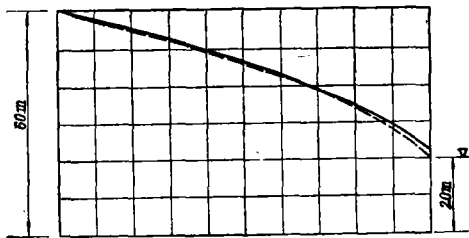


图 8 二维有自由面渗流(均匀介质)

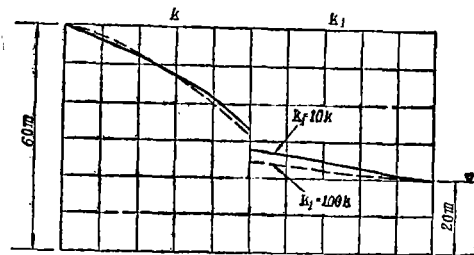


图 9 二维有自由面渗流(非均匀介质)

(二) 绕坝渗流

一大坝上游水头为 100m, 下游水头为零。河谷对称, 取一半计算域。坝体按不透水材料考虑, 地下水位为 50m。共分成 20 结点单元 105 个(紧靠坝基下为 16 结点单元), 总结点 610 个。图 10 为坝下无帷幕情况下的自由面, 图 11 则为有帷幕情况下的自由面。帷幕渗透系数为基岩渗透系数的 1/100。

以有帷幕情况为例, 计算时间为 (M160 机):

前处理及单元刚度阵	44.07s;	17 次迭代	143.62s;
总刚度阵组装	16.62s;	总计 CPU 时间	3min48s.
刚度阵分解	23.61s;		

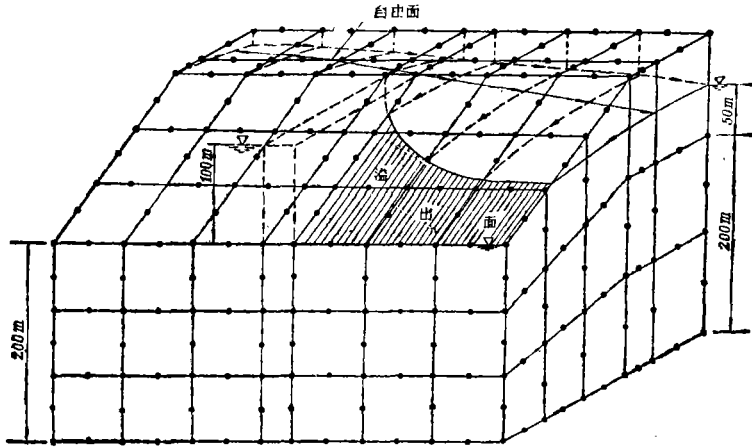


图 10 用初流量法计算绕坝渗流(无帷幕)

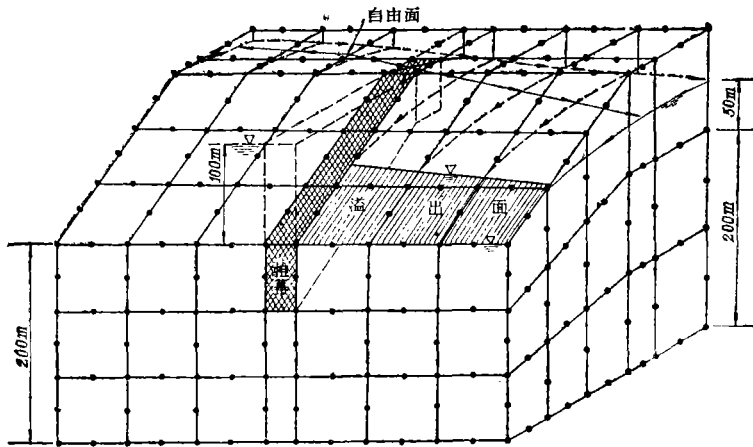


图 11 用初流量法计算绕坝渗流(有帷幕)

参 考 文 献

- [1] France, P. W. et al., Numerical analysis of free surface seepage problems. *J. Irrig. Drain. Div., ASCE*, Vol. 97, No. 1, 1971.
- [2] 魏泽光、黄俊、许国安、李春华, 三维稳定渗流的有限元计算. 水利学报, 1982年第1期.
- [3] Neuman, S. P., Saturated-unsaturated seepage by finite elements. *J. Hydraulic Div., ASCE*, Vol. 99, No. 12, 1973.
- [4] Desai, C. S., Finite element residual schemes for unconfined flow. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, No. 10, 1976.
- [5] Desai, C.S., Flow through porous media. Numerical Methods in Geotechnical Engineering. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [6] Desai, C.S., A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media. *Advances in Water Resources*, Vol. 6, 1983.
- [7] Baiocchi, C. et al., Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: Existence and theorems. *Ann. Mat. Pura Appl.*, Vol. 96, No.1, 1973.

- [8] Oden, J.T., Kikuchi, N., Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media. *Int. J. Engng. Sci.*, No.18, 1980.
- [9] Bruch, J.C., A survey of free boundary value problems in the theory of fluid flow through porous media: variational inequality approach-Part I and II. *Adv. Water Resources*, No.3, 1980.
- [10] Bathe, K.J. et al., Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *Int. J. for Num. Anal. Methods in Geomechanics*, Vol.3, 1979.
- [11] Steven, G.P., The moving interface problem with finite elements. *Adv. Water Resources*, Vol. 5, No.1,1982.
- [12] Aral, M., Maslia, M.L., Unsteady seepage analysis of Wallace Dam, *J.of Hydraulic Engng, ASCE*, Vol. 109, No. 6, 1983.
- [13] Lam, L., Fredlund, D.G., Saturated-unsaturated transient finite element seepage model for geotechnical engineering, *Adv. Water Resources*, Vol. 7, No. 4, 1984.
- [14] Gell, V.K., Der Einfluss der Sickerströmung im Untergrund auf die Berechnung der Spannungen und Verformungen von Bogenstaumauern. Veröffentlichungen des Institutes für Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Verkehrswasserbau der RWTH Aachen, Herausgegeben von Prof. Dr.Ing. W. Wittke, Heft 11, 1984.
- [15] 李春华, 稳定渗流有限元计算时采用固定网格法的初步研究. 第三届全国渗流力学学术讨论会论文汇编(3), 1986年.

Initial flow method for seepage analysis with free surface

Zhang youtian Chen Ping Wang Lei

(Institute of water Conservancy and Hydroelectric Power Research)

Abstract

The free surface is treated as movable boundary in traditional numerical method of seepage analysis. This method can not be used in the domain of different media with nearly horizontal layers. As the boundary of free surface is unknown initially, it is impossible to calculate the seepage field and seepage stresses by using the same mesh. Referring to the initial stress method in nonlinear elasticity problem, the authors propose an initial flow method for numerical analysis of seepage flow with free surface without mesh iteration. The significant defects of traditional method mentioned above are successfully resolved. A short description of the method and a numerical example of seepage around dam abutment are given in the paper.