

离散广义 Nash 汇流模型及其在河道洪水演算中的应用

闫宝伟¹, 于 雨¹, 郭生练², 潘 增¹

(1. 华中科技大学 水电与数字化工程学院, 湖北 武汉 430074;

2. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘要: 基于广义 Nash 汇流理论, 通过定义 S 曲线或滞蓄曲线, 简化了广义 Nash 汇流计算公式, 并推导得出了离散广义 Nash 汇流模型, 将河道下断面出流过程表述为时段初、末入流量与当前时刻及之前若干时刻出流量的线性组合, 权重系数由 S 曲线或滞蓄曲线得出。该模型物理概念明确, 又有一定统计意义, 结构简单, 形式直观, 便于在实际中推广应用, 最后通过实例分析检验了模型的预报能力。

关键词: 广义 Nash 汇流理论; 离散方程; 河道洪水演算; 滞蓄流量; 线性组合

中图分类号: TV121.7

文献标识码: A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.20160982

建立在牛顿力学理论基础之上的圣维南方程组全面描述了水流运动的动力学特性, 是解决河道流量演算的基本微分方程组, 但由于求解该方程组所涉及的边界条件复杂, 对资料要求较高, 通常情况下很难达到计算要求。因此, 水文学上更倾向于采用概化分析的方法, 将连续方程概化为水量平衡方程, 动力方程概化为槽蓄曲线方程。槽蓄曲线的表达形式不同, 就形成了不同的流量演算方法, 如马斯京根法、特征河长法和滞后流量演算法等^[1]。实际工作中, 整个演算河段很难满足这些方法简化的槽蓄曲线方程, 一般采取分段连续演算的方法, 又称单位线法或汇流系数法, 如马斯京根汇流曲线、加里宁单位线和 Nash 瞬时单位线等, 该类方法实质是分析单位入流形成的出流过程, 没有考虑河槽初始蓄水量的变化情况。为此, 闫宝伟等^[2]基于 Nash 瞬时单位线理论, 通过拉普拉斯变换和数学归纳, 求解了河道汇流系统的 n 阶常系数线性微分方程, 得出了非零初始条件下 Nash 瞬时单位线推演河道汇流的完整公式, 将河槽初始蓄水量的退水过程包含进来, 初步建立了广义 Nash 汇流理论^[3]。本文将以此为基础, 进一步简化广义 Nash 汇流模型的计算公式, 并推导广义 Nash 汇流公式的离散形式, 以便在实际工作中推广应用。

1 广义 Nash 汇流公式的简化形式

根据文献[2]的研究, 初始条件不为零时的广义 Nash 汇流模型计算公式为:

$$O(t) = e^{-\frac{t}{K}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n O^{(j-1)}(0) \frac{t^{i-1}}{(j-1)!(i-j)!K^{i-j}} + \int_0^t u(t-s)I(s)ds \quad (1)$$

式中: $I(t)$ 、 $O(t)$ 分别为河段的入流和出流过程; n 、 K 为 Nash 汇流模型的参数; $O^{(j)}(0)$ 为 $O(t)$ 在初始时刻的 j 阶导数。

若记^[4]

收稿日期: 2016-09-17; 网络出版日期: 2017-07-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20170721.1541.005.html>

基金项目: 国家重点研发计划项目(2016YFC0402708); 中央高校基本科研业务费项目(HUST: 2015QN216)

作者简介: 闫宝伟(1981-), 男, 山东滨州人, 副教授, 主要从事水文基础理论研究。E-mail: bwyang@hust.edu.cn

$$S_n(t) = \int_0^t u(t) dt = 1 - e^{-\frac{t}{K}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{t}{K}\right)^i \quad (2)$$

为 Nash 线性水库个数为 n 的 S-曲线, 并定义滞蓄曲线为:

$$R_n(t) \triangleq 1 - S_n(t) \quad (3)$$

式中: $R_n(t)$ 表示持续 1 个单位的入流在河槽中的滞蓄流量。由此, 单位入流被一分为二, 要么形成出口断面流量 $S_n(t)$, 要么留在河槽中形成滞蓄流量 $R_n(t)$ 。

广义 Nash 汇流公式可进一步简写为:

$$\begin{aligned} O(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} O^{(j-1)}(0) e^{-\frac{t}{K}} \sum_{i=j}^n \frac{1}{(i-j)!} \left(\frac{t}{K}\right)^{i-j} + \int_0^t u(t-s) I(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} O^{(j-1)}(0) e^{-\frac{t}{K}} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{i!} \left(\frac{t}{K}\right)^i + \int_0^t u(t-s) I(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} R_{n-j}(t) O^{(j)}(0) + \int_0^t u(t-s) I(s) ds \end{aligned} \quad (4)$$

由此, 广义 Nash 汇流公式可以采用 S-曲线或滞蓄曲线 $R_n(t)$ 进行表述, 从而简化了计算。

2 离散广义 Nash 汇流模型

结合广义 Nash 汇流公式的物理含义^[2], $t + \Delta t$ 时刻的流量由当前河槽蓄水量的退水过程与 $[t, t + \Delta t]$ 时段内入流产生的出流过程组成, 于是可得出 $t + \Delta t$ 时刻河道洪水演算方程为:

$$O(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\Delta t)^j}{j!} R_{n-j}(t) O^{(j)}(t) + \int_t^{t+\Delta t} u(t + \Delta t - s) I(s) ds \quad (5)$$

式(5)为 $O(t + \Delta t)$ 的解析表达式。

为便于计算, 通常需将该方程转化为离散形式, 即建立离散广义 Nash 汇流模型。为此, 需要将式中的导数项和积分项作离散化处理。 $O(t)$ 的各阶导数可由前向差分近似计算, 即:

$$O^{(j)}(t) = \frac{1}{\Delta t^j} \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^i O(t - i\Delta t) \quad (6)$$

式中: C_j^i 为组合数计算公式。

对于积分项的处理, 假设 $[t, t + \Delta t]$ 时段内入流 $I(s)$ 呈线性变化, 即对于 $s \in [t, t + \Delta t]$, 有:

$$I(s) = I(t) + \frac{\Delta I(t + \Delta t)}{\Delta t} (s - t) \quad (7)$$

式中: $\Delta I(t + \Delta t) = I(t + \Delta t) - I(t)$ 为 $[t, t + \Delta t]$ 时段内的入流增量。

将式(7)带入式(5), 则其中的积分项变为:

$$\int_t^{t+\Delta t} u(t + \Delta t - s) I(s) ds = \int_t^{t+\Delta t} u(t + \Delta t - s) \left[I(t) + \frac{\Delta I(t + \Delta t)}{\Delta t} (s - t) \right] ds \quad (8)$$

令 $\tau = t + \Delta t - s$, 则上式变为:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} u(t + \Delta t - s) I(s) ds &= \int_0^{\Delta t} u(\tau) \left[I(t + \Delta t) - \frac{\Delta I(t + \Delta t)}{\Delta t} \tau \right] d\tau \\ &= I(t + \Delta t) S_n(\Delta t) - \frac{\Delta I(t + \Delta t)}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(\tau) \tau d\tau \\ &= I(t) S_n(\Delta t) + \frac{\Delta I(t + \Delta t)}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} S_n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

若定义:

$$T_1(t) \triangleq \int_0^t S_n(\tau) d\tau \quad (10)$$

$$T_2(t) \triangleq \int_0^t R_n(\tau) d\tau \quad (11)$$

则 $T_1(t) + T_2(t) = t$ ，表示 $[0, t]$ 时段内共有 t 个单位的入流，其中，流出河槽的出槽量为 $T_1(t)$ ，滞留在河槽中的槽蓄量为 $T_2(t)$ 。由分部积分公式进一步得到：

$$\begin{aligned} T_2(\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{\tau}{K}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\tau}{K} \right)^i d\tau + \int_0^{\Delta t} R_1(\tau) d\tau \\ &= -K \int_0^{\Delta t} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\tau}{K} \right)^i d e^{-\frac{\tau}{K}} + \int_0^{\Delta t} R_1(\tau) d\tau \\ &= -K [R_n(\Delta t) - R_1(\Delta t)] + \int_0^{\Delta t} R_1(\tau) d\tau + \int_0^{\Delta t} R_{n-1}(\tau) d\tau \\ &= -K \sum_{i=2}^n [R_i(\Delta t) - R_1(\Delta t)] + n \int_0^{\Delta t} R_1(\tau) d\tau \\ &= -K \sum_{i=2}^n [R_i(\Delta t) - R_1(\Delta t)] + nK [1 - R_1(\Delta t)] \\ &= K \sum_{i=1}^n [1 - R_i(\Delta t)] \end{aligned} \quad (12)$$

联立式(8)一式(12)，可得：

$$\int_t^{t+\Delta t} u(t+\Delta t-s) I(s) ds = [1 - R_n(\Delta t)] I(t) + \left(1 - \frac{K}{\Delta t} \sum_{i=1}^n [1 - R_i(\Delta t)] \right) \Delta I(t+\Delta t) \quad (13)$$

式(13)表明， $[t, t+\Delta t]$ 时段内上游入流形成的出流量包含两部分，一部分是当前时刻流量 $I(t)$ 经过 Δt 形成的出流量，另一部分是该时段内入流增量扣掉滞蓄流量而形成的出流量。进一步联立式(5)、式(6)，则有：

$$\begin{aligned} O(t+\Delta t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i}{i!(j-i)!} R_{n-j}(\Delta t) O(t-i\Delta t) + [1 - R_n(\Delta t)] I(t) \\ &\quad + \left(1 - \frac{K}{\Delta t} \sum_{i=1}^n [1 - R_i(\Delta t)] \right) \Delta I(t+\Delta t) \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)即为离散广义 Nash 汇流模型的计算公式。该式表明， $t+\Delta t$ 时刻的出流量 $O(t+\Delta t)$ 可看作是当前时刻之前 $(n-1)\Delta t$ 时段内出流量与 $[t, t+\Delta t]$ 时段内入流量的线性组合，各权重系数则可通过 S-曲线或滞蓄曲线 $R_n(t)$ 计算得到。已有研究表明^[5-6]， n 一般不会超过 3，为此，本文给出了 $n \leq 3$ 时几种特殊情形的计算公式，供读者使用。为简单计，令 $O_{t+1} = O(t+\Delta t)$ ， $I_{t+1} = I(t+\Delta t)$ ， $R_i = R_i(\Delta t)$ ， $M_K = K/\Delta t$ ，则：

当 $n=1$ 时，

$$O_{t+1} = R_1 O_t + [M_K (1 - R_1) - R_1] I_t + [1 - M_K (1 - R_1)] I_{t+1} \quad (15)$$

当 $n=2$ 时，

$$O_{t+1} = (R_1 + R_2) O_t - R_1 O_{t-1} + [M_K (2 - R_1 - R_2) - R_2] I_t + [1 - M_K (2 - R_1 - R_2)] I_{t+1} \quad (16)$$

当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned} O_{t+1} &= (0.5R_1 + R_2 + R_3) O_t - (R_1 + R_2) O_{t-1} + 0.5R_1 O_{t-2} \\ &\quad + [M_K (3 - R_1 - R_2 - R_3) - R_3] I_t + [1 - M_K (3 - R_1 - R_2 - R_3)] I_{t+1} \end{aligned} \quad (17)$$

需要说明的是，当 $n=1$ 时，式(15)与文献[1]中由特征河长法得出的公式完全相同，一定程度上也验证了本文推导公式的正确性。此外，该式与马斯京根法有着完全相同的表达形式，即均为 O_t 、 I_t 和 I_{t+1} 的线性组合，只不过权重系数的表达方式不同而已。通过本文的研究，当 $n > 1$ 时，出流量除了与 O_t 、 I_t 和 I_{t+1} 相关外，还与当前时刻之前的 $(n-1)$ 个出流量有关。相比于其他统计类方法^[7]，离散广义 Nash 汇流模型在没有额外增加参数的情况下，通过引入历史流量的有效信息，达到提高洪水模拟精度的目的。

3 实例分析

将建立的离散广义 Nash 汇流模型应用于清江水布垭-隔河岩河段的河道洪水演算。水布垭水库是清江干流中下游河段三级开发的龙头梯级，隔河岩水库位于其下游 92 km 处，两坝址断面区间流域面积 3 570 km²，如图 1 所示。两座水库除了承担清江流域的防洪任务外，还为长江洪水错峰预留了 10 亿 m³ 防洪库容，以配合三峡水库减轻长江荆江河段的洪水威胁，因此，水布垭-隔河岩河段高精度的河道洪水演算对清江乃至长江防洪具有重要意义。

根据两水库坝址断面处 1964—2004 年的历史还原资料，选取该河段区间来水所占比重较小的 8 场洪水过程(计算时段 $\Delta t=3\text{ h}$)进行模拟计算，为了保持水量平衡，将区间来水按比例均匀分摊到水布垭坝址断面来水。为了展示离散广义 Nash 汇流模型的模拟效果，检验其预报能力，选取常用的马斯京根法进行对比。以均方根误差最小为目标函数，采用可以快速搜索到参数全局最优解的 SCE-UA 算法分别对两种方法进行参数率定^[8]，得到离散广义 Nash 汇流模型的参数 $n=4$ ， $K=1.10\text{ h}$ ，马斯京根法的参数 $k=5.51\text{ h}$ ， $x=0.27$ 。

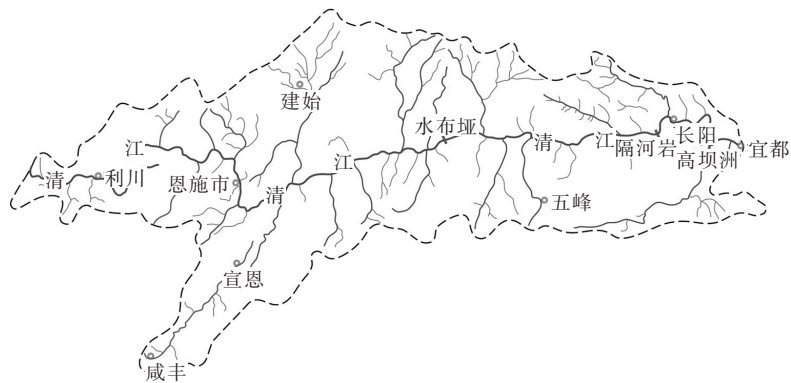


图 1 清江流域水系及研究河段地理位置

两种方法的精度评价结果见表 1，马斯京根法的洪峰相对误差基本在 -7 %~-17 %，均值为 -12.71 %，离散广义 Nash 汇流模型较马斯京根法均有不同程度的提高，洪峰相对误差基本在 -10% 以内，均值仅为 -3.59 %。洪水过程的模拟结果如图 2 所示，离散广义 Nash 汇流模型的模拟结果与实测过程线也更为接近，8 场洪水的平均确定性系数达到 0.953 1，而马斯京根法则略显逊色，尤其是对洪峰的模拟。究其原因，如式(14)所示，离散广义 Nash 汇流模型除了包含当前时刻出流量 O_t 的部分

表 1 河道洪水演算精度评价结果

洪号	洪峰实测值/(m ³ /s)	洪峰计算值/(m ³ /s)		洪峰相对误差/%		确定性系数	
		DGNM	Musk	DGNM	Musk	DGNM	Musk
19710611	11 126	11 020	10 071	-0.95	-9.49	0.988 5	0.966 5
19820728	9 318	8 976	7 930	-3.68	-14.89	0.971 0	0.950 0
19840727	8 196	8 196	7 567	0.00	-7.67	0.943 7	0.968 9
19890712	9 186	9 031	7 951	-1.69	-13.44	0.947 4	0.926 7
19900620	9 007	8 686	7 715	-3.57	-14.34	0.938 6	0.926 5
19910615	7 262	7 287	6 467	0.34	-10.95	0.926 7	0.926 9
19970717	11 412	10 616	10 057	-6.98	-11.87	0.968 4	0.946 6
	16 599	15 638	14 151	-5.79	-14.75		
19980703	10 468	9 419	8 687	-10.02	-17.01	0.940 7	0.930 8
平均值	—	—	—	-3.59	-12.71	0.953 1	0.942 9

注：DGNM 表示离散广义 Nash 汇流模型，Musk 表示马斯京根法。

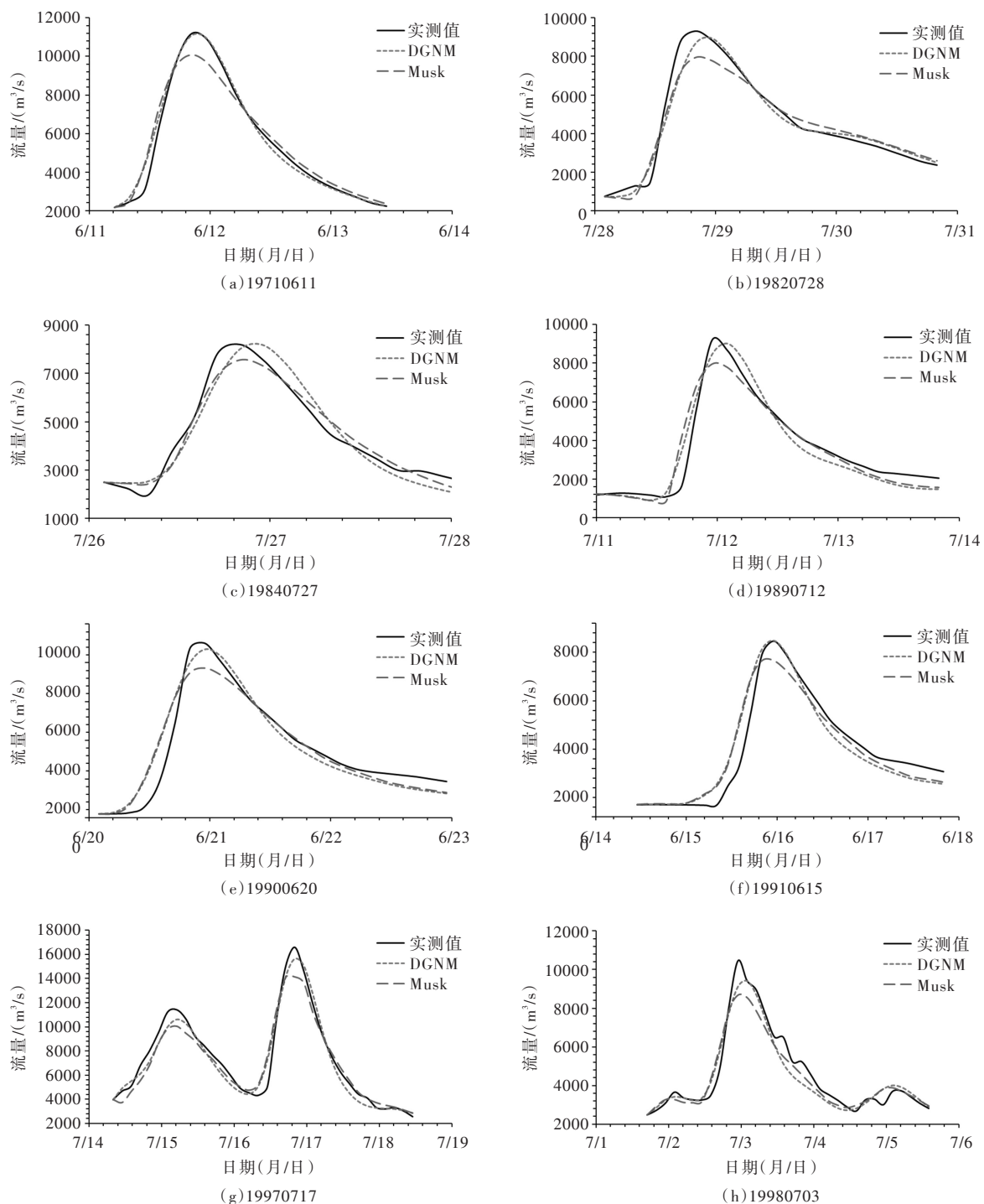


图2 洪水过程模拟结果

信息之外，还包含了前3个时刻 O_{t-1} 、 O_{t-2} 和 O_{t-3} 的一些信息，这些信息暗含了洪水过程的某种变化趋势，使得离散广义Nash汇流模型的预报能力表现得更加优异。

4 结论

根据广义Nash汇流理论，河道下断面出流过程由河槽蓄水量的退水过程和上游入流的响应过程组成，通过定义S-曲线或滞蓄曲线，推导得出了离散广义Nash汇流模型，将下断面出流过程演绎为

时段初、末入流量与当前时刻及之前若干时刻出流量的线性组合,充分挖掘了历史资料信息,将包含洪水过程变化趋势的有效信息引入进来。相比于其他统计类方法,离散广义 Nash 汇流模型在没有额外增加参数的情况下,通过清晰的概念解析和严密的公式推导,将权重系数表达为 S-曲线或滞蓄曲线的函数,物理概念明确,又有一定的统计意义。实例分析表明,相比于常用的马斯京根法,该模型可以在一定程度上提高洪峰和洪水过程的模拟精度。本文建立的离散广义 Nash 汇流模型,形式上简单直观,更加便于在实际中推广应用。

参 考 文 献:

- [1] 张文华,郭生练.流域降雨径流理论与方法[M].武汉:湖北科学技术出版社,2007.
- [2] 闫宝伟,郭生练,周建中.Nash 瞬时单位线推演河道汇流的完整公式[J].水科学进展,2014,25(3): 428-434.
- [3] YAN B, GUO S, LIANG J, et al. The generalized Nash model for river flow routing[J]. Journal of Hydrology, 2015, 530: 79-86.
- [4] 芮孝芳.水文学原理[M].北京:中国水利水电出版社,2004.
- [5] SINGH V P. Estimation of parameters of a uniformly nonlinear surface runoff model[J]. Hydrology Research, 1977, 8(1): 33-46.
- [6] 芮孝芳.利用地形地貌资料确定 Nash 模型参数的研究[J].水文,1999(3): 6-10.
- [7] 王家彪,雷晓辉,廖卫红,等.马斯京根模型改进新思路[J].南水北调与水利科技,2016,14(2): 87-92.
- [8] 张昊,李致家,阚光远,等.基于 SCE-UA 算法的马斯京根参数优化方法及程序化实现[J].水力发电学报,2013,32(2): 43-47.

The discrete generalized Nash Model and its application in the river flood routing

YAN Baowei¹, YU Yu¹, GUO Shenglian², PAN Zeng¹

(1. School of Hydropower and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Based on the generalized Nash flow routing theory, the calculation formula was simplified by the definition of S-curve or detention storage curve. The discrete generalized Nash model (DGNM) for river flow routing was derived. The outflow downstream can be expressed by a linear combination of the inflows at the beginning and end of the current time, and the outflows of the current time and several times before. The weight coefficients of the linear combination were obtained by the defined S-curve or detention storage curve. The DGNM, with a clear physical concept, also has a statistical significance. Its structure is very simple and its form is more intuitive, which facilitates its popularization and application in practice. The case study also suggested that the DGNM has a good forecasting ability.

Keywords: generalized Nash flow routing theory; discretization equations; river flood routing; detention storage flow; linear combination

(责任编辑:王成丽)