

文章编号:0559-9350(2018)04-0404-15

## 异重流潜入现象探讨 I: 水槽实验与理论分析成果回顾

范家骅, 祁伟, 戴清

(中国水利水电科学研究院, 北京 100048)

**摘要:** 本文对异重流潜入现象中各种潜入点水槽实验、理论分析和数值计算成果进行回顾, 并探讨不同进口水沙条件下异重流潜入点的水沙特性、潜入点与其下游异重流水沙因子的关系, 全文以两篇分述。本篇介绍各家用浑水、盐水和冷水进行实验, 在已知进口水沙(盐水或冷水)条件下, 获得潜入点断面的密度 Froude 数  $F_p$ , 且  $F_p$  为某一定值; 水库壅水区  $F_p$  值在 0.5 ~ 0.8 之间, 引航道口门处  $F_p$  在 0.25 左右。在潜入点理论分析、模型数值计算方面, 探讨了潜入点  $F_p$  值同掺混系数、阻力系数以及潜入点下游异重流深度  $h_d$  与潜入点水深  $F_p$  之比的关系; 各家建立不同概化图形并应用能量、动量方程进行分析, 求得不同形式的  $F_p$  表达式; 有学者利用紊流水沙模型进行数值计算与水槽实验的  $F_p$  值或  $h_d$  进行对比, 获得基本符合实际的结果。

**关键词:** 异重流; 异重流潜入; 水槽实验; 理论分析

**中图分类号:** TV145+.2

**文献标识码:** A

**doi:** 10.13243/j.cnki.slxb.20170641

## 1 异重流潜入及其工程问题

异重流的形成是两种不同密度的流体相遇时, 在一定条件下较重或较轻的流体从有压水流或无压水流向另一种不同密度的流体开始过渡到分层流(异重流)的相对运动过程。需要研究的问题是: 从非分层流过渡到分层流需要遵循哪些条件。这种过渡现象即在潜入点下游形成底部异重流流动, 或称之为异重流浑水楔。

(1) 水库入口处。洪峰期间或非汛期挟沙水流进入水库末端回水区, 流至一定的水深处潜入库底形成底部异重流, 即异重流浑水楔。潜入点下游浑水楔长度随洪峰历时而变, 洪峰历时短时, 浑水楔流不到坝址, 全部淤在水库内; 洪峰历时长时, 可通过坝底孔排出部分泥沙; 而潜入点上游壅水区会形成三角洲泥沙淤积并导致河段水位抬高<sup>[1-2]</sup>。

(2) 盲肠河段与河道的交汇处(船闸和引航道)。河道挟沙水流与盲肠河段内静止水体相遇因密度不同产生相对运动(即所谓交换水流), 挟沙水流潜入底部并流进盲肠河段, 同时上层清水则自盲肠河段流出进入河道。由于河道含沙水流这样持续不断地进入盲肠段而造成盲肠河段的累积淤积。

(3) 河道交汇处。河道主流含沙量大于支流含沙量时, 主流浑水潜入支流形成底部异重流并向支流上游方向运动, 且上溯至一定距离, 形成一段具有一定长度的浑水楔; 而当支流含沙量大于主流含沙量时, 支流浑水则潜入主流, 也形成底部异重流和具有一定长度的浑水楔。工程设计或研究的内容主要为楔内泥沙沿程淤积和淤积处理方法。

(4) 河口与海域的交汇处。海区盐水与河道水流在河口处相遇, 在一定条件下会形成向上游的盐水楔运动; 而盐水中含沙量较大时(受海滩风浪掀沙影响), 上溯水流与河道水流相遇, 在一定条件

收稿日期: 2017-07-03; 网络出版日期: 2018-04-13

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20180413.1426.001.html>

作者简介: 范家骅(1922-), 男, 浙江湖州人, 教授级高级工程师, 主要从事泥沙工程异重流和水库淤积研究。

通讯作者: 祁伟(1977-), 男, 湖北黄冈人, 高级工程师, 主要从事泥沙数值模拟和流域侵蚀研究。

E-mail: qiweisky@iwhr.com

下会形成含沙分层运动的浑水楔，浑水楔沿程泥沙淤积会抬高航道底高，需挖除淤积碍航泥沙，才能保持一定航深的航道通航。另外河道挟沙水流流出河口，因其含沙量较小，浑水密度小于海水密度，浑水会向海面扩散，形成上层异重流。

## 2 潜入现象研究回顾

异重流潜入现象的水槽实验、水力理论分析和模型数值计算工作，国内国外不少学者进行过研究，以下将分述和回顾各家研究成果；同时本文还将着重于浑水异重流在等宽水槽内的现象，在笔者先前工作的基础上做进一步的分析，与前人工作进行对比，以获得对异重流潜入现象进一步的认识，并对潜入现象的水力分析中若干问题进行讨论，为工程设计中水力计算提供参考<sup>[1-2]</sup>。

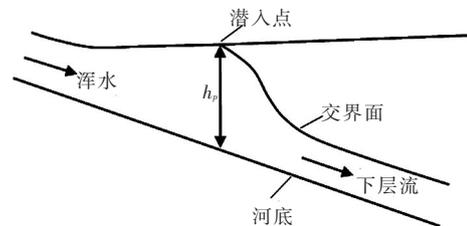


图1 异重流潜入图

**2.1 水库壅水区浑水潜入点实验** 浑水异重流潜入点水槽实验有范家骅<sup>[3]</sup>、芦田和男<sup>[4]</sup>、曹如轩<sup>[5]</sup>、曹如轩与钱善琪<sup>[6]</sup>、俞维升<sup>[7]</sup>、姚鹏与王兴奎<sup>[8-9]</sup>和焦恩泽<sup>[10]</sup>等。笔者分别在宽 15 cm 水槽和宽 50 cm 水槽内进行过浑水潜入实验，异重流潜入过程如图 1 所示。

水槽实验中一般观测记录潜入点的水深、含沙量、流速以及潜入点潜入后交界面线的沿程变化，并进行部分测次若干断面的含沙量垂线分布和流速分布的测量。对潜入点测定数据进行量纲分析，可获得潜入点断面密度 Froude 数  $F_p$  的值。根据 Schijf 和 Schonfeld<sup>[11]</sup> 的异重流双层渐变流方程，潜入点水深过渡到潜入点异重流水深之间会存在一个交界面线的拐点，该处密度 Froude 数等于 1；而潜入点水深大于该处临界密度 Froude 数中的水深，故可见潜入点处密度 Froude 数  $F_p$  小于 1。资料分析得潜入点处密度 Froude 数：

$$F_p = u_p / \sqrt{g' h_p} = 0.78 \quad (1)$$

式中： $u_p$  为异重流潜入点流速； $h_p$  为潜入点水深； $g' = (\Delta\rho/\rho)g$ 。1961 年笔者又在长 50 m、宽 0.5 m、高 2 m 水槽内进行异重流潜入点实验，进沙粒径  $d_{90} = 0.0145 \sim 0.05 \text{ mm}$ ， $d_{50} = 0.0055 \sim 0.008 \text{ mm}$ ，观测沿程浑水水深、含沙量和泥沙粒径的变化，4 次实验后得  $F_p = 0.58 \sim 0.66$ 。

芦田和男<sup>[4]</sup>进行浑水实验，分析得： $h_p = 0.365 \sqrt[3]{q^2/g'S}$ 。其中  $h_p$  为潜入点水深； $S$  为底部比降； $g' = (\Delta\rho/\rho)g$ ； $q$  为单宽流量。曹如轩等曾对上式利用他们的实验资料进行比较，其系数大于芦田和男的 0.365，一般在 0.4 ~ 0.57 之间，平均值为 0.44。

曹如轩<sup>[5]</sup>利用 3 个水槽进行含沙量  $6.5 \sim 715 \text{ kg/m}^3$  的浑水潜入实验，其中根据含沙量在  $30 \text{ kg/m}^3$  以下的资料得： $u_p / \sqrt{g' h_p} = 0.55 \sim 0.75$ 。而浑水含沙量大于  $100 \text{ kg/m}^3$  时  $F_p$  值较小，且随着含沙量的增加  $F_p$  值减小。含沙量在  $100 \sim 360 \text{ kg/m}^3$  时， $F_p = 0.4 \sim 0.2$ 。曹如轩等对含沙量高且流体黏滞系数大的高含沙水流，利用 Bingham 体有关参数和流体阻力系数联系来分析潜入点密度 Froude 数与含沙浓度的某种关系，分析得到符合实验数据变化趋势的结果。曹如轩与钱善琪<sup>[6]</sup>进行含粗沙高含沙量潜入点水槽实验，得到与低含沙量潜入类似的  $F_p$  值结果。俞维升<sup>[7]</sup>用高零土和石英沙挟沙水流以及盐水进行潜入点水槽实验，观察到潜入点向下游移动至一定处趋于稳定的现象，且平均  $F_p \approx 0.71$ ；同时通过沿程流速测量与分析，计算得潜入后异重流流量沿程增加的现象。姚鹏与王兴奎<sup>[8-9]</sup>在长而宽的水槽内进行 4 种底坡的浑水异重流潜入点试验，槽宽 1.2 m、长 63.8 m，观察到潜入点  $F_p$  值因底坡加大而降低，变化范围在 0.67 ~ 0.57 之间。焦恩泽<sup>[10]</sup>进行不同含沙量 ( $12 \sim 479 \text{ kg/m}^3$ ) 的潜入点水槽实验，其中大量试验为高含沙量异重流实验。同曹如轩实验类似， $F_p$  值随含沙量增加而变小，并利用 Bingham 体参数与潜入点建立一定关系。范家骅<sup>[12]</sup>考虑小浪底水库的含沙量范围可用曹如轩、焦恩泽等人的高含沙

异重流潜入点数据，并采用量纲分析方法，得到含沙量在  $400 \text{ kg/m}^3$  以下范围内的  $F_p$  平均关系为  $F_p = 0.9/c^{0.1}$ ， $c$  为含沙量。

近年来国内关于水库潜入点  $F_p$  的研究公开发表的论文近 20 余篇，主要为小浪底水库高含沙量异重流的控制运用中进行异重流潜入点参数的研究，并对包括小浪底水库及其它水库的观测资料、水槽实验和模型试验资料进行有关水沙因素与  $F_p$  的影响分析。如李涛和张俊华等<sup>[13]</sup>、李书霞等<sup>[14]</sup>、李涛和夏军强等<sup>[15]</sup> 的研究，可见在高含沙量异重流潜入点处， $F_p$  参数与含沙量值有一定影响。

各家实验结果以及浑水模型、数值计算结果列于表 1。

表 1 浑水异重流潜入点水槽实验、数值计算与水力分析

实验者	浑水水槽实验情况	$F_p$
范家骅(1959)	槽长 20m, 宽 0.15m, 槽底比降 0.03, 流量 0.34 ~ 3.8L/s, 含沙量 3.02 ~ 19.3kg/m <sup>3</sup>	0.78 (0.63 ~ 0.91)
范家骅(1961)	槽长 50m, 宽 0.5m, 流量 5.7 ~ 13.4L/s, 4 次实验	0.62(0.58~0.66)
曹如轩 (1984)	1 号槽, 长 21m, 宽 15cm, $J = 0.01$ 2 号槽, 长 26m, 宽 30cm, $J = 0.03$ 3 号槽, 长 34m, 宽 30cm, $J = 0.02$	0.55 ~ 0.75(10 ~ 30kg/m <sup>3</sup> ) 0.4 ~ 0.2(100 ~ 360kg/m <sup>3</sup> )
曹如轩、钱嘉琪(1995)	粗沙高含沙量, $d_{50}=0.05 \sim 0.08\text{mm}$	0.78
俞维升(1991)	槽长 20m, 宽 20cm, 高 60cm, 底坡 0.02 盐水与浑水实验, $d_{50}=0.0068\text{mm}$ (高岭土); $d_{50}=0.05\text{mm}$ (石英沙)	0.71
姚鹏、王兴奎 (1996)	循环水槽, 长 63.8m, 宽 120cm, 底坡 0.901% ~ 1.575%, 单宽流量 95 ~ 310cm <sup>2</sup> /s, $d_{50}=0.0038\text{mm}$	0.67(底坡 0.901%) 0.61(底坡 1.203%) 0.58(底坡 1.402%) 0.57(底坡 1.575%)
焦恩泽(2004)	低含沙量和高含沙量 11.1 ~ 479kg/m <sup>3</sup> , 水槽实验, 槽长 18m, 宽 0.5m, 泥沙粒径 $d_{46}=0.005\text{mm}$	0.68 ~ 0.87(11.1 ~ 121.5kg/m <sup>3</sup> ) 0.4 ~ 0.75(120 ~ 480kg/m <sup>3</sup> )
芦田和男(1978)	浑水实验	$h_p = 0.365 \sqrt[3]{q^2/g'S}$ , $S$ 为底坡
方春明等(1997) <sup>[16]</sup>	垂向二维水沙方程数值计算曹如轩浑水水槽 9 次实验, 计算值与实验值接近	0.48~0.78
范家骅(2008)	采用曹如轩、焦恩泽高含沙量潜入点实验数据修正 $F_p$ 表达式	$F_p = 0.9/c^{0.1}$ , $c$ 为含沙量(kg/m <sup>3</sup> )
李涛、张俊华等 (2012)	进口含沙量小于 803kg/m <sup>3</sup> 条件下, $F_p$ 加入含沙量修正系数, 利用小浪底水库潜入点资料进行水力分析	$F_p = \beta c^{-0.39} u_p / \sqrt{h_p}$ , $\beta = 0.12$ , $c$ 为含沙量(kg/m <sup>3</sup> )
李书霞等(2012)	进口含沙量小于 400kg/m <sup>3</sup> 条件下, 利用小浪底水库潜入点以及水槽潜入点资料进行水力分析	$h_p = 0.753 \sqrt[3]{q^2/c_e^{0.77}}$ , $c_e$ 为体积含沙量
李涛、夏军强等 (2017)	分析异重流潜入点流速分布对潜入点参数的影响, 利用小浪底水库潜入点以及水槽潜入点资料进行水力分析	$F_p = 0.49 c_e^{-0.069}$ $h_p = 0.7386 \sqrt[3]{q^2/c_e^{0.764}}$ $c_e$ 为体积含沙量

**2.2 盐水与冷热水潜入点实验** 除了浑水实验，尚有利用盐水和冷热水模拟浑水进入水库壅水区潜入的水槽实验，有 Keulegan<sup>[17]</sup>、Singh 与 Shah<sup>[18]</sup>、Itakura 与 Kishi<sup>[19]</sup>、Fukuoka 等<sup>[20]</sup>、Kan 与 Tamai<sup>[21]</sup> 等人的盐水实验，以及 Farrell 与 Stefan<sup>[22]</sup>、Akiyama 与 Stefan<sup>[23-24]</sup> 等人的冷热水实验。各家实验结果列于表 2。

Keulegan<sup>[17]</sup> 进行无潮河口盐水水槽实验，观测进槽的盐水异重流前锋加速运动规律。令进口水深即为潜入点水深，以  $h_p$  表示；异重流前锋速度以  $u_d$  表示。用资料分析可得： $h_p = 2h_d$  且  $u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.57$ ，故有  $u_p / \sqrt{g'h_p} = 0.29$ 。

表2 盐水和冷热水潜入点水槽实验

实验者	盐水或冷水潜入点水槽实验	$h_p$	$F_p$
Keulegan(1958)	盐水实验, 用三种水槽: 一为槽宽5.2cm, 水深11.2cm; 二为槽宽11.3cm, 水深11.2cm; 三为槽宽11.3cm, 水深22.4cm		0.29
Singh与Shah(1971)	盐水实验: 水槽长14m、宽0.4m、比降1/47~1/179、进槽单宽流量0.5~135cm <sup>2</sup> /s、密度差0.0005~0.013g/cm <sup>3</sup>	$1.3\sqrt[3]{q^2/g'}$	0.67(0.30~0.80)
Fukuoka等(1980)	盐水实验: 水槽比降1/10和1/60	$1.47\sqrt[3]{q^2/g'}$	0.40~0.72( $S=1/10$ ) 0.37~0.68( $S=1/60$ )
Kan与Tamai(1981)	盐水实验: 水槽边壁放大, $db/dx=0.1$		0.45~0.92
Farrell与Stefan(1986)	冷热水实验: 水槽比降1/21	$1.3\sqrt[3]{q^2/g'}$	0.69
Akiyama与Stefan(1987)	冷热水实验: 槽壁放大角1°、3°、7°, 槽底水平		0.56~0.73( $\delta=1^\circ$ ) 0.59~0.82( $\delta=3^\circ$ ) 0.63~0.89( $\delta=7^\circ$ ) 平均0.68
Stefan与Johnson(1989)	冷热水实验: 槽壁放大角3°以及大于7°。分析实验资料, $\alpha=1, 3, 7, 11\sim 12$ , 认为扩展角与 $F_p$ 关系不大, 此外还进行扩展角很大的水槽实验		0.68

Singh与Shah<sup>[18]</sup>用盐水在水槽内进行了异重流潜入实验。水槽长14m, 宽0.4m, 进槽单宽流量0.5~135cm<sup>2</sup>/s, 密度差为0.0005~0.013g/cm<sup>3</sup>, 异重流水深为1.5~17cm, 潜入点水深3~22.5cm, 水槽底坡 $S$ 为0.005~0.02。他们使用量纲分析潜入点水深 $h_p$ 为 $\sqrt[3]{q^2/g'}$ 、 $Re$ (Reynolds数)和底坡 $S$ 诸因素的函数, 并点绘潜入点水深与 $Re$ 和 $S$ 底坡的关系, 表明在 $Re=600\sim 11000$ 以及 $S=0.0056\sim 0.0215$ 之间, 此两因素对潜入点水深无多大影响; 在低流量和高密度的某些测次, 水面有明显的分界线, 但未观测到有向下游流动的异重流, 这些测次的 $\sqrt[3]{q^2/g'}$ 值小于2cm, 均未包括在分析之中。最后分析对较大 $\sqrt[3]{q^2/g'}$ 值有:

$$h_p / \sqrt[3]{q^2/g'} = 1.3 \quad (2)$$

以密度Froude数 $F_p$ 可表示为:

$$F_p = u_p / \sqrt{g'h_p} = 0.67 \quad (3)$$

Fukuoka等<sup>[20]</sup>在长6.9m、高0.9m、宽0.20m水槽内进行盐水潜入点实验。槽底比降为1/10的实验7次、比降1/60的实验7次, 观测潜入点交界面形状、流速分布、盐分分布等; 并分析点绘潜入点水深与 $\sqrt[3]{q^2/g'}$ 的关系; 还加入石桥和岩崎在水库中数次实验数据, 得平均值:  $h_p = 1.47\sqrt[3]{q^2/g'}$ 。Fukuoka等认为他们的实验结果与他们在文中介绍Benjamin的理论分析结果接近, 并计算出掺混系数 $E$ 在 $0.046 \times 10^{-2} \sim 1.8 \times 10^{-2}$ 之间, 还点绘实测和计算的沿程交界面高度的变化。

Kan与Tamai<sup>[21]</sup>在槽长6m、高0.9m、宽0.3m、底坡为0.1~0.25的水槽内进行盐水异重流潜入实验, 进槽盐水密度为1.00006~1.056g/cm<sup>3</sup>,  $q=2.4\sim 2.5$ cm<sup>3</sup>/cm, 得潜入点 $F_p$ 平均值0.63, 此值系26次数据0.45~0.92的平均值。

Farrell与Stefan<sup>[22]</sup>应用 $k-\varepsilon$ 模型计算了潜入点水流现象, 并进行了水槽冷热水实验。槽长40呎、宽16.5呎、底坡 $S=0.047$ , 观测潜入点处水深、流速和温度差以及潜入区下游异重流水深、流速及温度等。实验共进行7次, 实验资料分析得:  $h_p = 1.3\sqrt[3]{q^2/g'}$ 、 $F_p = 0.69$ 。实验还观测了1次掺混系数:  $(Q_m - Q_0)/Q_0 = 0.17\sim 0.46$ , 式中 $Q_m$ 为异重流流量,  $Q_0$ 为进槽流量。

Akiyama 与 Stefan<sup>[23-24]</sup>在槽宽 61 cm、深 30.5 cm 且具有一边扩展角 1°、3°和 7°的水槽内进行冷热水异重流潜入点实验，研究槽宽扩宽对潜入的影响，实测获得  $F_p=0.56 \sim 0.89$  之间，平均值为 0.68；实验中还测得潜入点下游异重流水深  $h_d$  和潜入点水深  $h_p$  的比值在 0.65 ~ 0.9 之间；并实测掺混系数  $\gamma = 0 \sim 0.31$ ，掺混系数的定义为  $Q_d = (1 + \gamma)Q_p = (1 + \gamma)Q_0$ ， $Q_0$  为进槽流量， $Q_d$ 、 $Q_p$  分别为异重流流量和潜入点流量。该文中点绘  $F_p$  和  $F_0$  的关系，可看出在 1°时， $F_p$  在 0.6 ~ 0.7 之间；3°时  $F_p=0.65 \sim 0.8$  之间；7°时  $F_p=0.6 \sim 0.8$  之间；总的范围在 0.6~0.8 之间，可见  $F_0$  对  $F_p$  的影响不大。关于此关系，Stefan 与 Johnson<sup>[25]</sup>在他们论文中补充了扩展角 3°共计 5 个新的测点，点绘在一起，显示  $F_p$  与  $F_0$  和  $\delta$  两者无多大关系。

以上潜入点盐水和冷热水实验的分析结果，用潜入点水深  $h_p/\sqrt[3]{q^2/g'}$  表示，或用密度 Froude 数  $F_p = u_p/\sqrt{g'h_p}$  表示。表 2 中，可见  $F_p$  在 0.3 ~ 0.92 的范围内，平均在 0.6 ~ 0.7 之间。 $h_p/\sqrt[3]{q^2/g'}$  与  $u_p/\sqrt{g'h_p}$  两者有下列关系：

$$F_p^2 = q^2 / (g'h_p^3) \quad (4)$$

### 2.3 “交换水流”浑水及盐水潜入实验与水力分析 引航道口门浑水潜入形成浑水楔、船闸盐水交换以及无潮河口入海处含盐水流潜入河口段形成盐水楔示意图见图 2。

这类船闸“交换水流”潜入实验的研究重点在于：求取船闸闸门打开后盐水进入储有清水的船闸时潜入形成底层水流的盐水和前锋速度两者的关系，可用密度 Froude 数  $u_f/\sqrt{\Delta\rho g H/\rho}$  的值表示，式中符号：前锋速度  $u_f$  (即异重流流速  $u_d$ )，河口水深  $H$  (即潜入点水深  $h_p$ )，清水与盐水的密度差  $\Delta\rho/\rho$ 。

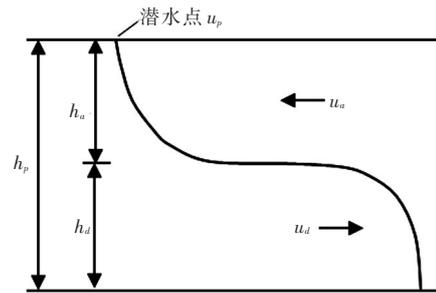


图 2 引航道河口口门异重流潜入图

进行相关理论分析和盐水实验工作的有 O'Brien 与 Chernov<sup>[26]</sup>、Yih C S (易家骅)<sup>[27]</sup>、Keulegan<sup>[28]</sup>、Middleton<sup>[29]</sup>、Rozovsky<sup>[30]</sup>、Kersey 和 Hsu<sup>[31]</sup>、Lam<sup>[32]</sup>、Barr<sup>[33]</sup>、Rottman 与 Simpson<sup>[34]</sup>。利用浑水进行引航道异重流潜入实验的有范家骅<sup>[1]</sup>。此外陈国谦和李行伟<sup>[35]</sup>利用  $k - \epsilon$  (BN6) 模型进行了数值计算。实验结果与水力分析列于表 3。

各家“交换水流”研究结果采用  $u_d/\sqrt{g'h_p}$  的值表示，可见均较接近。本文在后续讨论中为求潜入点处的水深和流速的关系，采用连续方程推算潜入点的水流流速  $u_p$ ，用潜入点处的  $F_p$ ，即  $u_p/\sqrt{g'h_p}$  值表示潜入点水流速度、水深以及密度差的关系。

从表 3 中可见理论分析结果： $u_d/\sqrt{g'h_p} = 0.5$ ， $h_d/h_p = 0.5$  (Yih, Abramam, 范家骅) 以及  $u_d/\sqrt{g'h_p} = \sqrt{1/2}$  (von Karman)。今运用连续方程  $u_d h_d = u_p h_p$ ，均可得：

$$F_p = u_p / \sqrt{g'h_p} = 0.25$$

至于各家水槽实验，由于上下层水深不同以及交界的阻力系数的影响， $F_p$  值略大于或略小于 0.25。

水库壅水区和引航道口门这两类异重流潜入，因为潜入处的几何和水流条件不同，主要由于上层水流流速  $u_a$  值在水库中很小，分析时可忽略不计；而在引航道中  $u_a$  接近  $u_d$ 。故两者的潜入点密度 Froude 数  $F_p$  有差异。综上所述：水库中  $F_p$  在 0.5~0.8 之间，引航道中  $F_p$  在 0.25 左右。

表3 船闸交换水流盐水、浑水实验与水力分析

作者	设备、实验条件	研究结果
O'Brien 与 Chernov(1934)	动量分析	$u_d / \sqrt{g'h_d} = 0.71, F_p = 0.25$
Yih C S.(易家训) (1947)	能量守恒分析 盐水实验	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.5, F_p = 0.25$ $u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.45$
Keulegan(1957)	盐水实验: 5种不同槽宽, 最宽为45.7cm, 最窄为2.4cm	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.462$
Rozovsky(1972)	盐水实验: 槽长450cm, 宽7cm, 高14cm, 密度 1.0007 ~ 1.20	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.45 \sim 0.53$
Kersey 与 Hsu(1976)	盐水实验: 槽长5.7m, 宽25cm, 深55cm, 底坡三种	正坡 $u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.46$ ( $h_d/h_p = 0.53$ )
		平坡 $u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.45$ ( $h_d/h_p = 0.41$ )
		倒坡 $u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.39$ ( $h_d/h_p = 0.53$ )
Abraham(1982)	能量分析	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.5, F_p = 0.25$
周华兴(1986)	盐水实验: 槽长7.46m, 宽0.5m, 含盐度15‰、25‰、35‰	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.45$
Lam(1995)	盐水实验: 槽长131.6cm, 宽7.7cm, 高11cm, 实验盐 水与清水深各约为10cm	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.43$
范家骅等(2011)	理论分析	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.5, F_p = 0.25$
范家骅等(1959)	浑水实验: 水槽长3.6m, 宽15cm和槽长10m, 宽20cm	$u_d / \sqrt{g'h_p} = 0.65$ ( $h_d/h_p = 0.4 \sim 0.63$ )

### 3 异重流潜入现象的理论分析成果

**3.1 von Karman 的理论分析成果** von Karman<sup>[36]</sup>应军事部门的求询, 讨论一种理想流体模型。图3为较重液体 $\rho_2$ 在较轻液体 $\rho_1$ 中运动, 考虑较轻液体在无限深度假设前提下, 推导下层较重液体恒定运动的流动速度 $c_1$ 。

von Karman 应用 A 点和 B 点的 Bernoulli 方程:

$$p_A = p_B + g\rho_1 h + 0.5\rho_1 c_1^2$$

在以一定速度运动的框架之中水流为恒定, 因为相对于这框架, 水流为静止:

$$p_A = p_B + g\rho_2 h$$

因此有:

$$c_1 = \sqrt{2g'h} \tag{5}$$

式中:  $g' = (\rho_2 - \rho_1)g / \rho_1$ 。此式表明前进流速与异重流交界面以下厚度  $h$  的关系。

**3.2 Benjamin 的理论分析成果** Benjamin<sup>[37]</sup>认为 von Karman 利用能量方程并忽略滞流点前端头部高密度水流受到与上层水流混合的能量损失是不能接受的, 虽然 Benjamin 的推理得到同样的  $c_1$  结果。易家训<sup>[38]</sup>的看法是 von Karman 虽然在这点上是一个疏忽, 但使用 Bernoulli 方程所取上下游两点, 如果在上游的点取的位置更上游一些, 下游的点更下游一些, 使用 Bernoulli 方程则无问题。

Benjamin 分析两平板之间的空穴流的空穴移动速度, 分析中忽略黏性和表面张力, 上游无穷远处水深为  $d$ , 流速为  $c_1$ , 下游无限远处水深为  $h$ , 流速为  $c_2$ 。概化图见图 4。

沿表面的 Bernoulli 方程, O 点表面的压力为零:

$$c_1^2 = 2g(d-h)$$

无限远处的压力  $p_0$ :

$$p_0 = -0.5gc_1^2$$

上下游远处的断面压力分布为静水压力分布, 动量守恒方程为:

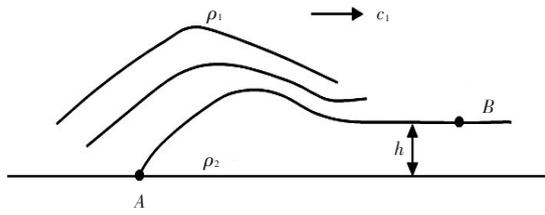


图3 von Karman异重流概化图

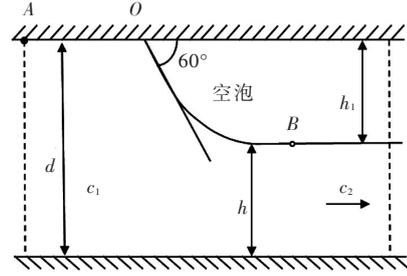


图4 Benjamin空穴流概化图

$$0.5\rho(c_1^2 d + gd^2) = \rho(c_2^2 h + 0.5gh^2)$$

连续条件为  $c_1 d = c_2 h$ ，解得：

$$h = 0.5d$$

$$F_1 = c_1 / (gd)^{1/2} = 0.5 \quad (6)$$

$$F_2 = c_2 / (gh)^{1/2} = \sqrt{2} \quad (7)$$

其次 Benjamin 考虑水流的能量损失：假定水流有水头损失，流速  $c_2$  在很远的下游会变成均匀流，定义  $\Delta$  为水头损失，则有：

$$c_2^2 = 2g(d - h - \Delta)$$

此式与力平衡所得的下式：

$$c_2^2 = \frac{g(d^2 - h^2)d}{(2d - h)h}$$

相等，可得：

$$\Delta = \frac{(2h - d)(d - h)^2}{2h(2d - h)}$$

当  $h < 0.5d$  时， $\Delta$  为负值，故在实际中不能发生。利用以上各式，可得当  $h > 0.5d$  时，有：

$$\frac{c_1}{\sqrt{gd}} = \sqrt{\frac{h(d^2 - h^2)}{d^2(2d - h)}} \quad (8)$$

此式应用于异重流，令  $k = h_d / h_p$ ，则有：

$$F_p = u_p / (g'h_p)^{1/2} = [h_d(h_p^2 - h_d^2)] / \sqrt{h_p^2(2h_p - h_d)} = \sqrt{k(1 - k^2) / (2 - k)} \quad (9)$$

**3.3 Singh 和 Shah 的理论分析成果** Singh 和 Shah<sup>[18]</sup>除了进行盐水潜入点水槽实验外，还用动量方程分析潜入现象，动量方程为：

$$q\rho_2(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = P_1 + W_s + P_2 - F_1 - F_2 \quad (10)$$

式中：左边代表动量的改变率， $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 为动量系数； $v_1$ 和 $v_2$ 为两断面的平均流速； $P_1$ 和 $P_2$ 为两断面的压力； $F_1$ 和 $F_2$ 为底部和交界面的剪力阻力； $W_s$ 为两断面间液体重量的分力。

Singh 在分析中作出如下假定：水压力为静水压力分布；每一点的水流方向平行于槽底；潜入长度  $L$  和底坡  $S$  均为小值，故第 2 断面总水深等于第 1 断面的水深，即潜入点水深；交界面上的阻力  $F_2$  假定平行于槽底。概化图见图 5。

为简化分析，忽略  $F_1$ 、 $F_2$  和  $W_s$  小值，可得：

$$q\rho_2(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = \frac{\rho_2 g h_p^2}{2} - \left( \frac{\rho_1 g h_p^2}{2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} g h_d^2 \right) \quad (11)$$

对上式的分析采用三种简化：第一种是忽略潜入点断面与下游异重流断面之间底部阻力和交界面阻

力, 并忽略动量流速分布系数, 得:  $2q^2/g' = (h_p + h_d)h_p h_d$ ; 第二种考虑动量流速分布系数, 计算得该系数  $\beta_1$  和  $\beta_2$  等于 1.18, 则:  $2.36q^2/g' = (h_p + h_d)h_p h_d$ ; 第三种考虑潜入点潜入区距离之内的底部和交界面阻力的影响, Singh 从均匀异重流中计算得平均总阻力系数  $f$  为底部阻力系数与交界面系数之和, 其值为 0.13, 最后得:  $3.1q^2/g' = (h_p + h_d)h_p h_d$ 。

Singh 按三种关系式计算的潜入点水深值同实验测得的潜入点水深值点绘在同一图上对比, 显示三条平均线在水深较大部分计算值偏大, 在水深较大时则偏差较小。

**3.4 Savage 和 Brimberg 的理论分析成果** Savage 与 Brimberg<sup>[39]</sup> 采用类似 Benjamin 的方法分析潜入点的水力特性。应用 Bernoulli 原理, 分析恒定二维两种密度  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的流体, 断面 1 处于潜入点上游远处, 流速为  $u_1$ , 水深为  $h_1$ ; 断面 2 处于潜入点的下游远处, 流速为  $u_2$ , 水深为  $h_2$ 。概化图见图 6。设  $O$  点为滞流点, 沿自由水面的  $O$  点的上游应用 Bernoulli 原理; 其次应用 Bernoulli 原理自  $O$  点沿交界面下游; 并设在潜入点上游相当远处和下游相当远处水压力为静水压力, 运用动量平衡方程可求得:

$$h_2 = 0.5h_1, F_1 = \sqrt{u_1^2/\varepsilon g h_1} \approx 0.5 \quad (12)$$

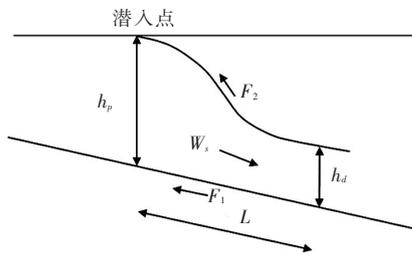


图 5 Singh 潜入点概化图

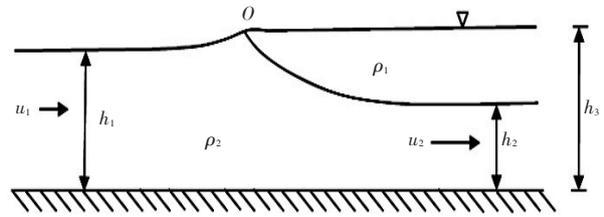


图 6 Savage 潜入点概化图

令潜入点水深  $h_1$  即为  $h_p$ , 可表示为:

$$h_3 = \sqrt[3]{4q^2/g'} = 1.587\sqrt[3]{q^2/g'} \quad (13)$$

Savage 用以上推导的关系式同 Singh 的潜入点实验水深  $Y = 1.85 + 1.3\sqrt[3]{q^2/g'}$  比较, 两者较接近, 但测点分散。实验数据显示除  $\sqrt[3]{q^2/g'}$  以外尚有其它参数的影响, 如底坡和交界面剪应力。Savage 考虑到第一部分的水力分析工作忽略了底部比降和剪应力, 故利用 Schijf 与 Schonfeld<sup>[11]</sup> 的双层渐变流一维运动方程来分析潜入点现象, 分析中令水流为恒定及上层流速为零, 对动力方程进行数值计算。

Savage 为了定性描述潜入点下游的交界面形状, 利用底层渐变流方程, 将潜入点处的底部作为坐标零点, 垂向坐标  $z$  代表水深, 纵向坐标为距离  $x$ , 推求渐变流方程的解。这样就类似于明渠渐变水流, 可分为数种水面线类型。

从潜入点起向下游的交界面线在缓坡和急坡情况下可能出现的是接近 M2 和 S2 的曲线。数值计算的结果可建立  $F_p$  为  $f$ ,  $\alpha$  和  $S$  (底坡) 的函数。对于缓坡有:

$$F_p = 2.05 \frac{(S/f)^{0.478}}{(1+\alpha)} \quad (14)$$

上式是在  $f = 0.01 \sim 0.09$ ,  $\alpha = 0.2 \sim 0.8$ ,  $\alpha = f_i/f$  以及缓坡范围内的计算结果。

而在急流条件下, 计算表明其性质与缓坡情况类似。但有一点不同, 当潜入点密度 Froude 数为  $F_p = 0.8$  至 0.845 时, 交界面曲线出现剧烈变化。Savage 分析 Singh 的实验资料, 其潜入点  $F_p$  值小于 0.8, 在 0.3 ~ 0.8 之间, 点绘  $h_p$  和  $\sqrt[3]{q^2/g'}$  的关系线, 并以参数  $F_p = 0.3 \sim 0.8$  作直线, 测点绝大部分在  $F_p = 0.3 \sim 0.8$  线的范围之内。

**3.5 Jain 的理论分析成果** Jain<sup>[40]</sup> 著文检验 Savage 的论文, 提出一些不同意见。他认为用能量方程于潜入点附近的水流在物理上是不可能的。潜入点附近的能量耗损不可忽视, 因此他利用动量方程

和能量方程(考虑能量损失 $\Delta$ )进行分析, 概化图见图7。并得到以下关系式:

$$F_1^2 = \frac{F_1^2}{1 - \delta/h_1} + \frac{\Delta}{\varepsilon h_1} + \frac{(\delta/h_1)^2}{2} - \frac{\delta}{h_1}$$

$$\frac{H_L}{\varepsilon h_1} = \frac{F_1^2}{2} - \frac{F_1^2}{2(1 + \delta/h_1)^2} - \frac{\Delta}{\varepsilon h_1} + \frac{\delta}{h_1}$$

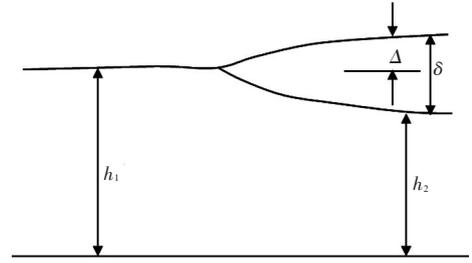


图7 Jain 潜入点概化图

式中:  $F_1 = \sqrt{u_1^2/\varepsilon g h_1}$ ;  $\delta$  为上层水深。  $H_L$  为断面1至

断面2的能量损失, 以上两式可求解  $F_1$  和  $\delta/h_1$  为两参数  $\Delta/\varepsilon h_1$  和  $H_L/\varepsilon h_1$  的函数。

Jain 指出 Savage 和 Brimberg 的分析,  $F_1 = 0.5$  为以上关系式当  $H_L = 0$  和  $\Delta/\varepsilon h_1 = \beta F_1^2$  且  $\beta = 0.5$  时的特解。Jain 对  $\Delta$  值作出  $\Delta/\varepsilon h_1 = \beta F_1^2$  的假定, 表示  $\beta$  与  $F_1^2$  的相应关系。Jain 计算出在不同  $\beta$  值时动量方程的解, 并且指出对于某一已知  $\beta$  值存在一个  $F_1$  的极大值 ( $F_{1\max}$ ), 大于此值时不能发生潜入现象。

Jain 的论文第二部分分析交界面曲线的计算, 认为积分的方向是敏感的, 计算应从控制断面算起。他利用 Schijf 与 Schonfeld<sup>[11]</sup> 的双层渐变流的一维方程进行计算, 并假定其上层水流的平均流速为零。上层水面为水平, 水深为  $a_1$ , 下层水深为  $a_2$ , 在潜入点处  $a_1 = 0$ , 如图5所示图形。可得:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left[ 1 - \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_1} \right) \right] \sqrt{1 - \left( \frac{\eta_c}{\eta} \right)^3}$$

式中:  $\eta = a_2/h_n$ ;  $\xi = Sx/h_n$ ;  $\eta_1 = a_1/h_n$ ;  $\eta_c = h_c/h_n$ ;  $\lambda = \alpha/(1 + \alpha)$ ;  $\alpha = f_i/f$ ; 临界水深  $h_c = \sqrt[3]{q^2/\varepsilon g}$ ; 正常水深  $h_n = \sqrt[3]{q^2/\varepsilon g (f_i + f)}/8S$ ;  $S$  为底部比降;  $f_i$  为交界面阻力系数;  $f$  为底部阻力系数;  $q$  为下层异重流单宽流量。

上式仅包含两个无量纲参数  $\lambda$  和  $\eta_c$ , 可用不同的  $\lambda$  和  $\eta_c$  值和不同下游条件求得数值解, 其积分是从下游控制断面向上游方向计算。

对缓坡的计算, 设一定的阻力系数  $\alpha = 0.5$ 、 $\lambda = 1/3$  和  $\eta_c < 1$  (即临界水深小于正常水深, 如  $\eta_c = 0.5$ ) 以及若干下游条件向上游进行积分。所求得的对于大范围的下游条件的交界面曲线在潜入点附近连接, 且潜入点水深值与下游边界条件无关。但当积分是从上游向下游进行计算, 即使很小的差别, 却会造成不同的交界面曲线。

对陡坡 ( $\eta_c > 1$ ) 计算两种典型的交界面曲线  $\eta_c = 1.3$  以及  $\lambda = 1/3$  ( $\alpha = 0.5$ ), 交界面曲线  $S_1$  和  $S_3$  均为缓流。

对于潜入水深, 无量纲潜入点水深  $\eta_p$  仅为  $\eta_c$  和  $\lambda$  (或  $\alpha$ ) 的函数, 有下列近似关系:

$$h_p = 1.6\lambda^{0.126} \left[ 8S / (f_i + f) \right]^{0.024} \sqrt[3]{q^2/g'} \quad (15)$$

**3.6 朱鹏程的理论分析成果** 朱鹏程<sup>[41]</sup> 首先对异重流潜入条件按以下概化图形(见图8)进行了理论分析, 得:

$$0.5\rho'gh_p^2 - 0.5\rho g(h_p - h_d)^2 - [(h_p - h_d)\rho g + 0.5\rho'gh_d]h_d = (h_d U_d^2 - h_p U_p^2)\rho'$$

得:

$$h_d/h_p = 0.5\sqrt{8F_p^2 + 1} - 0.5 \quad (16)$$

曹如轩等<sup>[5]</sup> 用同样方法, 得上述相同公式。朱鹏程注意到上列动量方程导得的方程类似水跃前后的共轭水深, 因此其间须经过临界水深。他认为要产生共轭水深,  $F_p$  必须小于1且  $F_d$  必须大于1。

芦田和男<sup>[4]</sup> 对异重流潜入现象进行分析和浑水实验, 求解潜入点水深。解得:

$$h_p/h_d = 0.5\left(\sqrt{8F_d^2 - 1} - 1\right) \quad (17)$$

**3.7 Akiyama 和 Stefan 的理论分析成果** Akiyama 与 Stefan<sup>[42-43]</sup>分析潜入现象时，首先利用动量公式并引进掺混系数 $\gamma$ ，推导潜入点密度 Froude 数与潜入点下游异重流厚度等因子的关系。

图 9 概化图形中的 CV I 动量方程假定可忽略混合区的底部阻力以及忽略比降的影响，得下式：

$$u_d^2 h_d + u_a^2 (h_p - h_d) - u_p^2 h_p = \frac{g}{2} \left( \frac{\Delta\rho_0}{\rho_a} h_p^2 - \frac{\Delta\rho_d}{\rho_d} h_d^2 \right)$$

他们定义掺混系数 $\gamma$ （水库清水混入底部异重流的水量）：

$$\gamma = u_a (h_p - h_d) / u_p h_p$$

CV II 的动量方程：

$$\rho_a u_a^2 (h_p - h_d) = 0.5(P_a + \Delta\rho_0)g (h_p - h_d)^2 - 0.5\rho_a g (h_p - h_d)^2$$

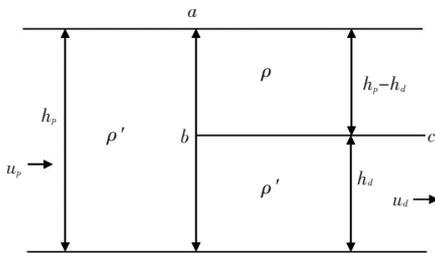


图 8 朱鹏程异重流潜入点概化图

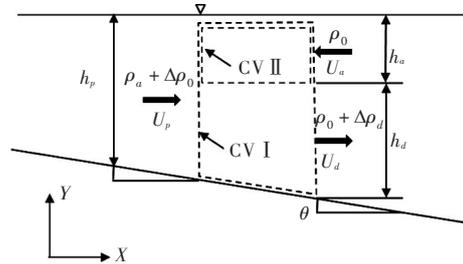


图 9 Akiyama 异重流潜入点概化图

以上两动量方程合并，得：

$$u_d^2 h_d - u_p^2 h_p = \frac{g}{2} (2\varepsilon_0 h_p h_d - (\varepsilon_d + \varepsilon_0) h_d^2) \quad (18)$$

式中： $\varepsilon_0 = \Delta\rho_0/\rho_0$ ； $\varepsilon_d = \Delta\rho_d/\rho_d$ 。令  $k = h_d/h_p$ ，上式可写为：

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \left( \frac{2+\gamma}{2} + F_d^2 \right) \left( \frac{1}{1+\gamma} \right) + \frac{F_d^2}{(1+\gamma)^3} = 0 \quad (19)$$

式(19)中  $F_d$  为潜入点下游的异重流密度 Froude 数，此式表明  $F_d$  和  $h_d/h_p$  和  $\gamma$  的关系。

为了分析潜入点水沙因子与底部阻力、交界面阻力以及下游异重流的影响，Akiyama 作出假定：潜入点下游异重流在急坡时  $F_d$  等于临界值；在缓坡时  $F_d$  等于正常值  $F_n$ 。他们利用 Ellison 与 Turner<sup>[44]</sup> 的具有掺混系数的异重流缓变方程，求解缓坡和急坡时的  $h_d/h_p$  与掺混系数、阻力系数、底部比降以及异重流流速分布系数的关系式。由于所求得的关系式中阻力系数与掺混系数的各项关系式过长，为了同 Singh 等人实验资料做比较，Akiyama 假定在进口处无掺混现象，即  $\gamma = 0$ ，故得下式：

缓坡：

$$h_p = (1.19 \sim 1.04) \sqrt[3]{f_i/S} \sqrt[3]{q_0^2/\varepsilon g} \text{ , 或 } F_p = 0.77 \sim 1.00 \quad (20)$$

陡坡：

$$h_p = (1.71 \sim 1.49) \sqrt[3]{q_0^2/\varepsilon g} \text{ , 或 } F_p = 0.45 \sim 0.55 \quad (21)$$

式中的异重流流速分布系数采用 Ellison 与 Turner 的实验值。（Ellison 与 Turner 用盐水做实验所得流速分布系数  $S_1$ 、 $S_2$  值远较 Parker 等<sup>[45]</sup>浑水异重流实验测得值为小）。Akiyama 将此两式与 Singh 的盐水潜入实验资料进行对比，实验值与计算值符合。

**3.8 Parker 和 Toniolo 的理论分析成果** Parker 和 Toniolo<sup>[46]</sup>专门针对 Akiyama 与 Stefan 的论文<sup>[43]</sup>提出意见。他们指出：Akiyama 文中在分析阻力系数和底部比降等影响时所假定潜入点下游的异重流运动

在缓坡时的  $F_d$  值为正常值、在急坡时的  $F_d$  值为临界值是错误的，也是没有必要的。他们认为 Akiyama 的分析，用两种 CV I 和 CV II 的动量守恒方程就足以阐明  $h_d$  和  $h_p$  的关系，而且能得到  $F_p$  和  $F_d$  两者仅为掺混系数  $\gamma$  的关系式。

Parker 分析 CV I 的动量方程，导得以下两式：

$$F_p^2 - F_p^2 \frac{(1+\gamma)^2}{k} - F_p^2 \frac{\gamma^2}{1-k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{(1+\gamma)} = 0 \quad (22)$$

$$F_d^2 = F_p^2 \frac{(1+\gamma)^3}{k^3} \quad (23)$$

当  $\gamma=0$  时，式(22)可得与朱鹏程推导相同的式(16)。

从式(22)可计算  $k$  为  $F_p$  和  $\gamma$  的函数，如果  $h_p$ 、 $u_p$ 、 $\varepsilon_\gamma$  (来水密度  $\rho_\gamma = \rho_a(1 + \varepsilon_\gamma)$ ) 以及  $\gamma$  为已知，则  $h_d$ 、 $u_d$  和  $\varepsilon_d$  (异重流密度  $\rho_d = \rho_a(1 + \varepsilon_d)$ ) 可从式(22)、连续方程  $u_p h_p(1 + \gamma) = u_d h_d$  以及  $\varepsilon_d = \varepsilon_\gamma / (1 + \gamma)$  求得。

Parker 根据 CV II 的动量方程，导得：

$$F_p^2 = \frac{1}{2\gamma^2} (1-k)^3 \quad (24)$$

将式(24)代入式(22)

$$\frac{1}{\gamma^2} (1-k)^3 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{(1-k)^3}{k} (1-\gamma)^2 - (1-k)^2 + 1 - \frac{k^2}{1+\gamma} = 0 \quad (25)$$

Parker 认为利用 CV II 的动量方程，有了式(24)就可直接计算  $F_p$ ，如仅有 CV I 的动量方程，所求得的式(22)还须先知道  $F_p$  和  $\gamma$  (或  $F_d$  和  $\gamma$ ) 用于计算  $k$  值，而用 CV II 动量方程求得的式(24)和式(25)， $F_p$  和  $k$  两者可从已知  $\gamma$  时求得。

#### 4 异重流潜入现象的数学模型计算成果

方春明等<sup>[16]</sup>对水库异重流潜入条件采用动量方程分析得：

$$F_p = \sqrt{k(1+k)/2} \quad (26)$$

根据两种概化图形，利用能量方程和动量方程进行理论分析，探讨了异重流在水库中潜入点密度 Froude 数小于 1 的水沙条件。方春明等还建立了二维水流和悬沙数学模型进行数值计算。为检验模型结果，选取曹如轩 9 组水槽潜入点实验所测资料进行对比计算，计算得  $F_p=0.48 \sim 0.77$ ，与实验  $F_p=0.45 \sim 0.75$  比较，两者接近。而且他们对影响水流和泥沙模型计算结果的几个因素进行了潜入点流态和潜入点水深的对比计算；还计算了异重流潜入点的流场、清浑水交界面水深的纵向变化以及水面线的纵向变化，发现在壅水区水面线在潜入点附近出现倒比降。此计算结果与 Savage 提出的异重流潜入现象分析的概化图形中下游断面水位隆起高度  $\Delta$  在定性上相符。

Farrell 与 Stafan<sup>[22,47]</sup>对水库中异重流潜入现象用  $k \sim \varepsilon$  模型进行计算，模型包括水流动量方程和温度方程，共进行 12 次紊流模型方程计算，得  $h_p = 1.6 \sqrt[3]{q^2/g'}$ ，即  $F_p=0.5$ 。潜入点水深与 Singh 和 Shah、Farrell 和 Stefan 的实验数据系数 1.3 相比大 20%，Farrell 和 Stafan 尚难解释其差别的原因；其次这 12 次计算中，计算初期混合系数(用符号  $\gamma$  表示)在 0.028 ~ 0.19 之间， $\gamma$  的变化可用下式表示， $\gamma = 0.5(F_d - 0.7)$ ，式中  $\gamma = (Q_d - Q_0)/Q_0$ ， $Q_0$  为进槽流量， $Q_d$  为异重流流量。

Bournet 等<sup>[48]</sup>的异重流潜入数值模型计算，应用水流动量方程、 $k - \varepsilon$  模型以及温度输移方程，计算流速场和温度在等宽槽和水槽其中一边扩展一个小的角度 ( $1^\circ \sim 7^\circ$ ) 两种情况下的分布。在等宽槽的计算中引进掺混系数  $E = (\Delta Q / \Delta x) / uh$ ，其值在 0.005 ~ 0.012 之间，计算得潜入点水深

$h_p = 1.5\sqrt[3]{q^2/g'}$ , 此式  $h_p$  计算值较 Singh 实验值大些。

表4 水库异重流潜入点理论分析与数值计算

作者	分析方法	分析结果
von Karman(1940)	用 Bernoulli 方程分析无限水深下底部异重流	$u_d^2 = 2gh_d(\Delta\rho/\rho)$
Benjamin(1968)	用能量和动量方程分析水体充满管道, 尾端进入空气	$F_d = u_d/\sqrt{gh_d} = \sqrt{2}, h_d = 0.5h_p$ $F_p = u_p/\sqrt{gh_p} = 1/2$
	考虑能量损失水头损失 $\Delta$	$F_p = \sqrt{\frac{h_d(h_p^2 - h_d^2)}{h_p^2(2h_p - h_d)}}$
Singh 与 Shah(1971)	盐水实验资料分析	$h_p = 1.3\sqrt[3]{q^2/g'}$
	用动量方程分析	$2q^2/g' = (h_p + h_d)h_p h_d$ $h_p/h_d = 1/2, F_p = 1/2$
Savage 与 Brimberg (1975)	用 Bernoulli 方程分析	$u_d^2 = \sqrt{2}g'(h_3 - h_1)$ $h_p = \sqrt[3]{4q^2/g'} = 1.59\sqrt[3]{q^2/g'}$
	二层渐变流计算	$F_p = 2.05(S/f)^{0.475}/(1 + \alpha)$
Jain(1981)	用动量方程和能量方程分析, 假定 $\beta F_p^2 = \Delta/\varepsilon h_p$ , $\alpha F_p^2 = H_L/\varepsilon h_p$	$F_p^2 = \frac{F_p^2}{1 - h_a/h_p} + \frac{\Delta}{\varepsilon h_p} + \frac{(h_a/h_p)^2}{2} - \frac{h_a}{h_p}$ $H_L = \frac{F_p^2}{2} - \frac{F_p}{2(1 + h_a/h_p)^2} - \frac{\Delta}{\varepsilon h_p} + \frac{h_a}{h_p}$
	二层渐变流计算	$h_p = 1.6\lambda^{0.126}\left(\frac{8S}{f_i + f}\right)^{0.024}\sqrt[3]{q^2/g'}$
芦田和男(1978)	动量方程分析	$h_p = (\sqrt{8F_d^2 + 1} - 1)h_d/2$
朱鹏程(1981) 曹如轩(1984)	动量方程分析	$h_d = (\sqrt{8F_p^2 + 1} - 1)h_p/2$
方春明等(1997)	动量方程	$F_p = \sqrt{k(1+k)/2}$
	能量方程	$u_p^2/2 + g'(h_p - h_d) = u_d^2/2 + g\Delta h + \Delta E$
Akiyama 与 Stefan (1984)	动量方程, $\gamma = u_a(h_p - h_d)/u_p h_p$	$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\left(\frac{2+\gamma}{2} + F_d^2\right)\left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + \frac{F_d^2}{(1+\gamma)^3} = 0$
	二层渐变流水力计算, 为与水槽实验资料比较, 设 $\gamma = 0$	缓坡: $h_p = (1.19\sim 1.04)(f/S)\sqrt[3]{q^2/g'}$ 急坡: $h_p = (1.71\sim 1.49)\sqrt[3]{q^2/g'}$
Parker 与 Toniolo (2007)	动量方程, $\gamma = u_a(h_p - h_d)/u_p h_p$	$F_p^2 - F_p^2 \frac{(1+\gamma)^2}{k} - F_p^2 \frac{\gamma^2}{1-k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{(1+\gamma)} = 0$ $F_d^2 = F_p^2 \frac{(1+\gamma)^3}{k^3}$
Farrell 与 Stefa(1988)	$k-\varepsilon$ 模型计算, $\gamma = (Q_d - Q_0)/Q_0$	$h_p = 1.6\sqrt[3]{q^2/g'}, F_p = 0.5$ $\gamma = 0.028\sim 0.19, \gamma = 0.5(F_d - 0.7)$
Bournet 等(1999)	$k-\varepsilon$ 模型计算掺混系数 $E = (\Delta Q/\Delta x)/uh$	$h_p = 1.5\sqrt[3]{q^2/g'}$ $E = 0.005\sim 0.012$

表5 引航道口门异重流潜入点理论分析

作者	分析方法	分析结果
O'Brien, Chern(1934)	动量分析	$u_f / \sqrt{g'h_p} = 0.5$
von Karman(1940)	能量分析	$u_d / \sqrt{g'h_d} = \sqrt{2}$
Abraham(1982)	能量分析	$u_f / \sqrt{g'h_p} = 0.5$
Parker(2007)	动量分析, $\gamma = 1$	$F_p^2 - \frac{4F_p^2}{k} - \frac{F_p^2}{1-k} + \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4} = 0$

以上各家理论分析和数值模型计算成果, 汇总列于表4和表5。有关浑水异重流潜入实验结果分析, 将在本文第II篇中给予介绍。

参 考 文 献:

[ 1 ] 范家骅. 异重流与泥沙工程: 实验与设计[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011.

[ 2 ] 范家骅, 等. 异重流运动的实验研究[J]. 水利学报, 1959(5): 30-48.

[ 3 ] 范家骅, 等. 异重流的研究和应用[M]. 北京: 水利电力出版社, 1959.

[ 4 ] EGASHIRA S, ASHIDA K. Condition that suspended load plunges to form a gravity current[C]//19th Proc. of the Conference on Natural Disaster Science. Japan, 1978.

[ 5 ] 曹如轩, 任晓枫, 卢文新. 高含沙异重流的形成与持续条件分析[J]. 泥沙研究, 1984(2): 1-10.

[ 6 ] 曹如轩, 钱善琪, 郭崇, 等. 粗沙高含沙异重流的运动特性[J]. 泥沙研究, 1995(2): 64-73.

[ 7 ] 俞维升. 水库沉滓运动特性之研究[D]. 台北: 台湾大学, 1991.

[ 8 ] 姚鹏, 王兴奎. 异重流潜入规律研究[J]. 水利学报, 1996(8): 77-83.

[ 9 ] 姚鹏. 异重流运动的试验研究[D]. 北京: 清华大学, 1994.

[ 10 ] 焦恩泽. 黄河水库泥沙[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 2004.

[ 11 ] SCHIJF J B, SCHONFELD J C. Theoretical Considerations on the Motion of Salt and Fresh Water[C]//Proceedings of Minnesota International Hydraulics Convention. Minnesota: Minneapolis, 1953: 321-333.

[ 12 ] 范家骅. 关于水库浑水潜入点判别数的确定方法[J]. 泥沙研究, 2008(1): 74-81.

[ 13 ] 李涛, 张俊华, 马怀宝, 等. 异重流潜入重力修正系数研究[J]. 人民黄河, 2012, 34(7): 28-29.

[ 14 ] 李书霞, 夏军强, 张俊华, 等. 水库浑水异重流潜入点判别条件[J]. 水科学进展, 2012, 23(3): 363-368.

[ 15 ] 李涛, 夏军强, 张俊华, 等. 水库异重流潜入点流速分布及其判别式改进[J]. 工程科学与技术, 2017, 49(2): 62-68.

[ 16 ] 方春明, 韩其为, 何明民. 异重流潜入条件分析及立面二维数值模拟[J]. 泥沙研究, 1997(4): 68-75.

[ 17 ] KEULEGAN G H. Twelfth progress report on model laws for density currents: the motion of saline fronts in still water[R]. National Bureau of Standards; U.S. Dept. of Commerce, 1958.

[ 18 ] SINGH B, SHAH C R. Plunging phenomenon of density currents in reservoirs[J]. La Houille Blanche, 1971, 26(1): 59-64.

[ 19 ] ITAKURA T, RISHI T. Study on the turbidity density current in a reservoir[C]//16th Symp. on Science of Natural Disaster. Japan, 1979: 233-234.

[ 20 ] FUKUOKA S, FUKUSHIMA Y, NAKAMURA K. Study on the plunge depth and interface form of density currents in a two-dimensional reservoir[C]//土木学会论文报告集第302号. 1980: 55-65.

[ 21 ] KAN K, TAMA N. On the plunging point and initial mixing of the inflow into reservoirs[C]//Proc. 25th Japanese Conf. on Hydraulics. Japan, 1981: 631-636.

[ 22 ] FARRELL C J, STEFAN H G. Buoyancy induced plunging flow into reservoirs and coastal regions[R]. St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Minnesota: University of Minnesota, 1986.

- [ 23 ] AKIYAMA J, STEFAN H . Gravity currents in lakes, reservoirs and coastal regions: Two-layer stratified flow analysis[R] . St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Minnesota: University of Minnesota, 1987 .
- [ 24 ] AKIYAMA J, STEFAN H . Onset of underflow in slightly diverging channels[J] . Journal of Hydraulic Engineering-Asce, 1987, 113 (7): 825-844 .
- [ 25 ] STEFAN H, JOHNSON T . Negative buoyant flow in diverging channel . III. Onset of underflow [J] . Journal of Hydraulic Engineering, 1989, 115(4): 423-436 .
- [ 26 ] O'BRIEN M P, CHERNO J . Model law for motion of salt water through fresh [J] . Trans . ASCE, 1934(99) : 576-594 .
- [ 27 ] YIH C S . A study of the characteristics of gravity waves at a liquid surface[D] . Iowa: State Univ . of Iowa, 1947 .
- [ 28 ] KEULEGAN G H . An experimental study of the motion of saline water from locks into fresh water channels[C]// 13th Progress Report on Model Laws of Density Current, National Bureau of Standards, 1957 .
- [ 29 ] MEDDLETON G V . Experiments on density and turbidity currents . I . motion of the head[J] . Canadian J . of Earth Sciences, 1966(3): 523-546 .
- [ 30 ] ROGOVSKY . International Symposium of Stratified Flows[C] . Novosibirsk, 1972: 440-458 .
- [ 31 ] KERSEY D G, HSÜ K . Energy relations of density current flows: an experimental investigation[J] . Sedimentology, 1976(23): 761-789 .
- [ 32 ] LAM S T . Experimental investigation of lock-release gravity current[D] . Hong Kong: Univ . of Hong Kong, 1995 .
- [ 33 ] BARR D I H . Densimetric exchange flow in rectangular channels . II: Some observations of the structure of lock exchange flow [J] . La Houille Blanche, 1963(7): 757-766 .
- [ 34 ] ROTTMAN J W, SIMPSON J E . The initial development of gravity currents from fixed-volume release of heavy fluids[C]//IUTAM Symp . Delft, 1983: 347-359 .
- [ 35 ] 陈国谦, 李行伟, 李植 . 开闸式湍动异重流[J] . 中国科学(E辑), 2002, 32 (6): 754-764.
- [ 36 ] von KARMAN T . The engineer grapples with non-linear problems [J] . Bull . Am . Math . Soc . , 1940(46) : 615-683 .
- [ 37 ] BENJAMIN T B . Gravity current and related phenoma [J] . J . Fluid Mech . , 1968(31): 209-248 .
- [ 38 ] YIH C S . Stratified Flows [J] . Annual Review of Fluid Mechanics, 1969 .
- [ 39 ] SAVAGE S B, BRIMBERG J . Analysis of plunging phenomena in water reservoirs [J] . J . Hydraul . Res., 1975, 13(2): 187-205 .
- [ 40 ] JAIN S C . Plunging phenomena in reservoirs[C]//Proc . Symp . On Surface Water Impoundments, Minnesota: Minneapolis, 1981 .
- [ 41 ] 朱鹏程 . 异重流的形成与衰减[J] . 水利学报, 1981(5): 52-59 .
- [ 42 ] AKIYAMA J, STEFAN H . Theory of plunging flow into a reservoir: Internal memorandum[R] . St. Anthony Falls Hydraulic Lab., Univ. of Minnesota, 1981 .
- [ 43 ] AKIYAMA J, STEFAN H . Plunging flow into a reservoir: theory [J] . J . Hydraul . Eng . , 1984, 110(4): 484-499 .
- [ 44 ] ELLISON T H, TURNER J S . Turbulent entrainment in stratified flows [J] . J . Fluid Mech . , 1959(6) : 423-428 .
- [ 45 ] PARKER G, GARCIA M, FUKUSHIMA Y, et al . Experiments on turbidity currents over an erodible bed [J] . J . Hydraul . Res . , 1987, 25(1): 123-147 .
- [ 46 ] PARKER G, TONIOLO H . Note on the analysis of plunging of density flows [J] . Journal of Hydraulic Engineering, 2007, 133(6): 690-694 .
- [ 47 ] FARRELL C J, Stefan H. Mathematical modelling of plunging reservoir flows [J] . Journal of Hydraulic Research, 1988, 26(5): 525-537 .
- [ 48 ] BOURNET P, DARTUS D, TASSIN B, et al . Numerical investigation of plunging density current [J] . J . Hydraul . Eng . , 1999, 125(6): 584-594 .

## Investigation of density current plunging I : Review of previous flume experiment works and theoretical analysis

FAN Jiahua, QI Wei, DAI Qing

(China Institute of Water Resources & Hydropower Research, Beijing 100048, China)

**Abstract:** This paper reviews previous flume experiment works and theoretical analysis of density current plunging, then explores the value of the densimetric Froude number  $F_p$  at the plunge point and the relationship of the value of  $F_p$  with the depth of the density current  $h_d$ . The paper contains two parts. Here the first part presents a review of experiments of plunge point with turbid, saline or cold water inflow. Experimental value of  $F_p=0.5\sim 0.8$  in reservoir backwater region, and  $F_p=0.1\sim 0.3$  in navigation guiding channels were obtained by many researchers. Then a summary was made for the previous theoretical analysis and the numerical analysis of turbulent flow models for plunge point prediction. Various authors investigated the parameter  $F_p$  which varies with the mixing coefficient, friction coefficient and the ratio of the density current depth  $h_d$  downstream of the plunge point to the plunge point depth  $h_p$ . Several schematic diagrams were developed, and analyses were made applying energy equation and momentum equation, and obtained some different types of  $F_p$  expressions. Some investigators used the method of turbulent models with numerical calculation to determine the value of  $h_p$  or  $F_p$ . Comparison was made with the experiment values of  $h_p$  or  $F_p$ . The previous theoretical analysis results of density current plunge point were used to compare with the writer's investigation results by theoretical analysis.

**Keywords:** density current; density current plunging; flume experiment; theoretical analysis

(责任编辑: 李福田)

---

(上接第 403 页)

## Study on mechanism of energy spending and transition in open channel flow with suspended canopy

HUAI Wenxin, ZHONG Ya, YANG Zhonghua

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** Suspended canopy in open channel would have an adverse impact on flow capacity. Based on the previous theory of energy balance mechanism, this paper analyzed the energy transition law and energy balance mechanism of uniform flow section of open channel with suspended canopy, and has derived the expression of energy borrowing, energy spending, energy transition and relative accumulate values. Using Plew's experimental data of velocity and shear stress, the distribution of energy accumulation along the water depth has been obtained. The result shows that whether at a point or in a cross-section, the energy borrowing is equal to the sum of local energy spending and local energy transition. Energy spending is concentrated in the vegetated layer, reaching the maximum at the interface of vegetation and non-vegetation layers. The total energy transition in the cross section is zero. The energy borrowing in the vegetated layer and the riverbed cannot compensate for the energy spending. So surplus borrowed energy in other parts were needed to be transmitted to these two parts. In the near bed layer, the accumulate values of turbulent energy and energy transition are quite the same, which indicates that most of the energy in this layer is converted into turbulent energy, and only a very small part is converted into heat in order to withstand the resistance in the near bed layer.

**Keywords:** suspended canopy; steady uniform flow; energy spending; energy transition; energy balance

(责任编辑: 李福田)