水　利　学　报

2018年5月　SHUILI　XUEBAO　第49卷　第5期

文章编号:0559-9350(2018)05-0523-12

分期设计洪水重现期计算模型研究

宋松柏[1]，程　亮[2]，王宗志[2]

（1. 西北农林科技大学 水利与建筑工程学院，陕西 杨凌　712100；
2. 南京水利科学研究院 水文水资源研究所，江苏 南京　210029）

摘要：年最大洪水与分期最大洪水序列是两个选样不同的样本，其重现期和设计值计算对于水库安全防洪、提高兴利效益和洪水资源安全利用至关重要。本文根据重现期的定义，运用数理统计法，推导了独立同分布单变量和多变量水文事件重现期的计算公式。在此基础上，结合现有的3种分期洪水概率模型，严格推导了年最大洪水重现期与分期最大洪水有关重现期计算模型和关系式。采用蒙特卡洛试验，经模拟计算，文中有关重现期模型计算值与经验重现期一致，表明文中推导的重现期模型是正确的。最后，以南四湖流域1963—2008年分期7日最大入湖洪量资料为例，给出了分期最大洪水分布参数估计、年最大洪水分布计算过程，说明分期最大设计洪水的计算问题。文中模型与计算方法以期为我国分期设计洪水计算提供理论支撑。

关键词：分期设计洪水；重现期；全概率；混合分布；最大值分布

中图分类号：TV122[+].3　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.13243/j.cnki.slxb.20171219

1　研究背景

分期设计洪水是指一年内不同季节或时期所计算的设计洪水。分期内洪水可以是暴雨、凌汛、融雪、飓风、梅雨和台风等不同物理机制形成的，具有明显的季节性规律。因此，分期设计洪水广泛地应用于水库分期调度、工程施工期防洪等方面[1-2]。水利工程防洪设计标准一般以年最大值选样洪水的重现期为度量单位，反映年最大值超过事件在很长时期内平均T年发生一次。显然，分期洪水选样与年最大值选样不同，其参数估计、重现期及设计值计算与传统的年最大值或年值洪水频率计算也有所不同[3]。

自1960年代以来，分期设计洪水受到了国内外学者的高度关注[4]。根据分期洪水的物理特性以及与年最大洪水的关系，主要有全概率模型[5-7]、极值分布模型[1,5]和混合分布模型[1-2,8-9]3种分布模型，并围绕3种模型研究了分期洪水序列与年最大洪水序列的频率计算、参数估计等[10-14]。这些模型为分期设计洪水计算奠定了理论基础，被广泛地应用于分期设计洪水的频率计算，但目前尚缺乏分期洪水与年最大洪水重现期的定量关系研究。丁晶等[15-16]、王善序[17-20]、邹鹰[21]、张涛等[22]和郭生练等[23-28]分别在汛期分期和取样方法、分期设计洪水概率分布、随机模型估算分期设计洪水、分期设计洪水与防洪设计标准关系等方面进行了研究。其计算方法有超定量法、事件发生次数期望值法、传统的多变量联合概率分布法和copulas函数法等。这些方法为揭示分期设计洪水与年最大设计洪水关系、分期设计洪水频率与防洪标准的关系等提供了理论基础。一些学者认为根据分期洪水系列计算出的洪水频率本质上不同于全年最大洪水系列推求的洪水频率，分期洪水的重现期一般较年洪水重

收稿日期：2017-12-19；网络出版日期：2018-05-24

网络出版地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20180524.0841.001.html

基金项目：国家自然科学基金项目(51479171，51579059，51179160)

作者简介：宋松柏(1965-)，男，陕西永寿人，博士，教授，主要从事水文水资源研究。E-mail：ssb6533@nwsuaf.edu.cn

通讯作者：程亮(1985-)，男，湖北浠水人，博士，高级工程师，主要从事水文水资源研究。E-mail：chengliang@nhri.cn

现期长[1,28]。采用分期洪水频率等于重现期T倒数的假定是错误的，由此计算得出的T年一遇分期设计洪水一般系统偏小[17-20]。由于出发点的差异，分期设计洪水重现期大多按照超过事件首次发生的等待试验次数期望值来建立模型，随着分期数目的增加，模型计算难度加大。另外，分期设计洪水计算方法尚未统一，缺乏分期洪水重现期计算公式严格的数学推导，也缺乏表征分期洪水与年最大洪水重现期的定量关系。

本文应用概率原理，结合分期洪水事件的特性，从连续两次超过事件发生间的期望间隔试验次数(间隔时间)的重现期定义出发，推导分期洪水事件重现期计算公式，力求简化现有计算模型。在此基础上，推导分期洪水计算中几种常见事件的重现期计算公式，以期为分期设计洪水计算提供理论支撑。

2 重现期计算模型

在工程设计中，重现期有两种定义[29]：(1)重现期是指超过事件首次发生的期望等待试验次数，如大于等于某一设计洪水值第一次发生的期望等待年数。(2)重现期表示连续两次超过事件发生之间的期望间隔试验次数(间隔时间)。对于独立同分布年值选样事件，两种定义的重现期是等价的。本文在推导分期最大洪水重现期计算公式之前，从第2种重现期定义出发，首先推导单变量、多变量独立同分布事件的重现期计算公式。

假定事件设计值的重现期为T_A(年)，在n年中，有d维变量事件$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_d\end{bmatrix}$大于某一门限值$\boldsymbol{q}_0=\begin{bmatrix}q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0d}\end{bmatrix}$发生了$m$次，$m\geqslant n$，平均每年发生$m/n$次。设事件$\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\}$发生的联合概率为$P=P\left(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\right)$，其中，“$\in\boldsymbol{q}$”为$d$维变量事件发生条件，它可以是超过“>”和不超过“≤”条件的各种组合。

设事件$\boldsymbol{e}$在T_A年中发生数目的期望值为$E\left(N_e\right)$。在T_A年内，有$N=T_A\ m/n$个洪水事件。根据概率原理，有$E\left(N_e\right)=T_A\ m/n\ P\left(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\right)$。同样，根据重现期的定义，对于超定量序列来说，事件e平均发生的时间间隔(年)即为重现期T_A，有$\dfrac{T_A}{E\left(N_e\right)}=\dfrac{n}{m}\dfrac{1}{P\left(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\right)}$。即

$$T_A=\frac{\mu}{P\left(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\right)} \tag{1}$$

式中，$\mu=n/m$为d维变量相邻超定量序列点的间隔(年)。

对于年值序列来说，事件选样数目等于年数，即，$m=n$，有

$$T_A=\frac{1}{P}=\frac{1}{P\left(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{q}\right)} \tag{2}$$

显然，式(1)、式(2)中，当$d=1$时，$T_A=\dfrac{\mu}{P\left(Q>q\right)}$，$T_A=\dfrac{1}{P\left(Q>q\right)}$，分别转换为单变量超定量和年值事件的重现期计算公式。上述过程避免了重现期数学期望复杂的数学推导，也便于理解重现期原理。

3 分期洪水概率计算模型

为了便于叙述和理解，本文采用2个分期洪水和年最大洪水为例，说明分期洪水概率计算模型原理。

设年最大洪水为Q，一年内假定划分为2个洪水分期A_1和A_2，其最大洪水值分别为X和Y，且满足$Q=\max\left(X,\ Y\right)$，即年最大洪水发生在分期A_1或A_2。假定有样本容量n，年最大洪水序列Q的观测值为q_i，分期A_1和A_2内最大洪水序列的观测值为x_i和y_i，$q_i=\max\left(x_i,\ y_i\right)$，$i=1，2，\cdots，n$。在年最大洪水序列$q_i$中，$i=1，2，\cdots，n$，有$n_1$个洪水发生在分期$A_1$内，其值为$x_1^*$，$x_2^*$，$\cdots$，$x_{n_1}^*$，有$n_2$个洪水发生

在分期A_2内，其值为y_1^*，y_2^*，…，$y_{n_2}^*$，$n_1+n_2=n$。按照现有文献，分期洪水概率计算模型主要有以下3种模型[5-9]。

3.1 全概率模型 全概率模型认为年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$，可以发生在分期A_1内，也可以发生在分期A_2内。最大洪水超过事件$\{Q>q\}$概率可以表示为分期A_1最大洪水X和A_2内季节最大洪水Y的全概率形式。

$$P(Q>q)=P(A_1)P(X>q|A_1)+P(A_2)P(Y>q|A_2) \tag{3}$$

式中：$P(Q>q)$为年最大洪水超过q的概率；$P(A_1)$、$P(A_2)$分别为发生在分期A_1和A_2内的年最大洪水概率，$P(A_1)+P(A_2)=1$；$P(X>q|A_1)$、$P(Y>q|A_2)$分别为分期A_1和A_2内年最大洪水超过q的概率，可分别用序列x_1^*，x_2^*，…，$x_{n_1}^*$和y_1^*，y_2^*，…，$y_{n_2}^*$估算分布参数。

式(3)也可以表示为不超过事件的概率形式

$$P(Q\leqslant q)=P(A_1)\cdot P(X\leqslant q|A_1)+P(A_2)\cdot P(Y\leqslant q|A_2) \tag{4}$$

或

$$F(q)=P(A_1)\cdot F_{A_1}(q|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)+P(A_2)\cdot F_{A_2}(q|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2) \tag{5}$$

式中：$F(q)=P(Q\leqslant q)$；$F_{A_1}(q|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)=P(X\leqslant q|A_1)$；$F_{A_2}(q|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2)=P(Y\leqslant q|A_2)$。

$$f(q)=P(A_1)\cdot f_{A_1}(q|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)+P(A_2)\cdot f_{A_2}(q|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2) \tag{6}$$

式中：$F(q)$、$f(q)$分别为年最大洪水的累计分布和密度函数；$F_{A_1}(q|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)$、$f_{A_1}(q|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)$分别为分期$A_1$内年最大洪水的累积分布和密度函数，$\boldsymbol{\theta}_1$为参数集；$F_{A_2}(q|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2)$、$f_{A_2}(q|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2)$分别为分期$A_2$内年最大洪水的累积分布和密度函数，$\boldsymbol{\theta}_2$为参数集。

根据式(6)，有年最大洪水分布的似然函数

$$L=\left[P(A_1)\right]^{n_1}\left[P(A_2)\right]^{n_2}\cdot\prod_{i=1}^{n_1}f_{A_1}(x_i^*|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)\cdot\prod_{i=1}^{n_2}f_{A_2}(y_i^*|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2) \tag{7}$$

式(7)两边取对数，有对数似然函数

$$\ln L=n_1\ln\left[P(A_1)\right]+n_2\ln\left[P(A_2)\right]+\sum_{i=1}^{n_1}\ln f_{A_1}(x_i^*|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)+\sum_{i=1}^{n_2}\ln f_{A_2}(y_i^*|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2) \tag{8}$$

式(8)两边分别对$P(A_1)$和$P(A_2)$求偏导数，有

$$\frac{\partial\ln L}{\partial P(A_1)}=\frac{n_1}{P(A_1)}-\frac{n_2}{1-P(A_1)},\quad \frac{\partial\ln L}{\partial P(A_2)}=\frac{n_2}{P(A_2)}-\frac{n_1}{1-P(A_2)} \tag{9}$$

令上述偏导数分别等于零组成方程组，求解此方程组有

$$P(A_1)=\frac{n_1}{n_1+n_2}=\frac{n_1}{n};\ P(A_2)=\frac{n_2}{n_1+n_2}=\frac{n_2}{n} \tag{10}$$

式(10)就是$P(A_1)$和$P(A_2)$的极大似然法估计值。

3.2 极值分布模型 年最大洪水不超过q的事件$\{Q\leqslant q\}$等价与事件$\{\max(x,\ y)\leqslant q\}$，因此，根据极值分布模型，有

$$P(Q\leqslant q)=P\left[\max(x,\ y)\leqslant q\right]=P(X\leqslant q,\ Y\leqslant q) \tag{11}$$

当两个分期洪水序列独立时，有

$$P(Q\leqslant q)=P(X\leqslant q)P(Y\leqslant q) \tag{12}$$

显然，式中$P(X\leqslant q)$和$P(Y\leqslant q)$分别为分期A_1和A_2不超过q的概率，可用分期最大洪水序列x_1，x_2，…，x_n、y_1，y_2，…，y_n估算分布参数，分期最大洪水可以具有不同的概率分布。

令$F(q)=P(Q\leqslant q)$；$G_{A_1}(q,\ \boldsymbol{\theta}_3)=P(X\leqslant q)$；$G_{A_2}(q,\ \boldsymbol{\theta}_4)=P(Y\leqslant q)$。式(12)可写为$F(q)=G_{A_1}(q,\ \boldsymbol{\theta}_3)\cdot$

$G_{A_2}(q, \boldsymbol{\theta}_4)$，两边对$q$求偏导数，有密度函数

$$f(q)=g_{A_1}(q, \boldsymbol{\theta}_3)\cdot G_{A_2}(q, \boldsymbol{\theta}_4)+G_{A_1}(q, \boldsymbol{\theta}_3)g_{A_2}(q, \boldsymbol{\theta}_4) \tag{13}$$

式中：$G_{A_1}(q, \boldsymbol{\theta}_3)$、$g_{A_1}(q, \boldsymbol{\theta}_3)$分别为分期$A_1$最大洪水的累积分布和密度函数，$\boldsymbol{\theta}_3$为参数集；$G_{A_2}(q, \boldsymbol{\theta}_4)$、$g_{A_2}(q, \boldsymbol{\theta}_4)$分别为分期$A_2$最大洪水的累积分布和密度函数，$\boldsymbol{\theta}_4$为参数集。

式(12)也可以写为超过事件的概率形式

$$P(Q>q)=P(Y>q)+P(X>q)-P(X>q)P(Y>q) \tag{14}$$

3.3 混合分布模型 分期A_1和A_2季节可能发生暴雨洪水、融雪洪水和飓风洪水等，则最大洪水服从不同的概率分布，出现分布非一致性，年最大洪水分布服从混合分布。年最大洪水超过q事件$\{Q>q\}$等价于分期A_1内最大洪水超过q事件$\{X>q\}$、分期A_2最大洪水超过q事件$\{Y>q\}$至少有一个事件发生。根据概率加法原理，有

$$P(Q>q)=P(Y>q)+P(X>q)-P(X>q, Y>q) \tag{15}$$

当两个分期洪水序列独立时，有

$$P(Q>q)=P(Y>q)+P(X>q)-P(X>q)P(Y>q) \tag{16}$$

式中，$P(X>q)$、$P(Y>q)$分别为分期A_1和A_2内最大洪水超过概率，与极值分布相同，可采用分期最大洪水序列x_1，x_2，…，x_n、y_1，y_2，…，y_n估计参数。

式(16)也可以写为不超过事件的概率形式

$$P(Q\leqslant q)=P(X\leqslant q)P(Y\leqslant q) \tag{17}$$

从以上推导可以看出，极值分布模型与混合分布模型实际上是等价的。

4 分期洪水重现期计算模型

式(3)进一步可写为

$$P(Q>q)=P(A_1)P(X>q|A_1)+P(A_2)P(Y>q|A_2)=P(X>q, A_1)+P(Y>q, A_2) \tag{18}$$

式中：$P(X>q, A_1)=P(A_1)P(X>q|A_1)$；$P(Y>q, A_2)=P(A_2)P(Y>q|A_2)$。

式(18)说明了式(3)—式(17)分期洪水概率计算模型中，极值分布模型和混合分布模型分项概率计算是相同的，但是，他们与全概率模型中分项概率计算是不同的。以下将推导分期最大洪水重现期计算模型。

4.1 年最大洪水超过事件发生的重现期 年最大洪水序列即为常用的年值选样序列，每年选取一个最大值，如果满足独立同分布条件，年最大洪水事件超过概率$G_A(q)=P(Q>q)$给定下，按照式(2)，有年最大洪水超过$\{Q>q\}$事件的重现期T_A

$$T_A=\frac{1}{P(Q>q)}=\frac{1}{G_A(q)} \tag{19}$$

式中，$G_A(q)=P(Q>q)$为年最大洪水超过q的概率，年最大洪水序列q_1，q_2，…，q_n满足独立同分布条件下，可由此序列估计分布参数，计算超过q的概率。

一般来说，若年最大洪水序列可以是暴雨、融雪和飓风等不同物理机制形成的，则年最大洪水序列具有概率分布的非一致性，因此，$G_A(q)$需采用上述3种分期洪水概率模型来计算。

4.2 分期发生年最大洪水超过事件的重现期 年最大洪水是由哪一个分期最大洪水形成的，也就是某一分期最大洪水形成年最大洪水超过$\{Q>q\}$事件发生的重现期，这个分期的设计洪水对于工程防洪至关重要。

假定分期A_1最大洪水形成年最大洪水超过$\{Q>q\}$事件，其重现期为$T_{A_1}^*$。如前所述，n年内分期A_1

最大洪水形成年最大洪水n_1次，平均每年发生 n_1/n 次。在$T_{A_1}^*$年内，有$N=T_{A_1}^* n_1/n$个分期A_1年最大洪水事件，设事件$\{X>q|A_1\}$发生数目的期望值为$E\left(N_1^*\right)$，根据概率原理，有$P\left(X>q|A_1\right)=\frac{E\left(N_1^*\right)}{n}$，则$E\left(N_1^*\right)=nP\left(X>q|A_1\right)$，分期$A_1$发生年最大洪水超过事件$\{X>q|A_1\}$的重现期为$\frac{T_{A_1}^*}{E\left(N_1^*\right)}=\frac{n}{n_1 P\left(X>q|A_1\right)}$。即

$$T_{A_1}^*=\frac{n}{n_1 P\left(X>q|A_1\right)} \tag{20}$$

同理，对于分期A_2，分期A_2发生年最大洪水超过事件$\{Y>q|A_2\}$的重现期为

$$T_{A_2}^*=\frac{n}{n_2 P\left(Y>q|A_2\right)} \tag{21}$$

由式(20)—式(21)，可以得到年最大洪水事件$\{Q>q\}$发生在分期A_1或A_2内的重现期关系式

$$T_{A_1}^*=\frac{n}{n_1 H_{A_1}\left[G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]}=\frac{n}{n_1 P\left[X>G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)|A_1\right]} \tag{22}$$

$$T_{A_2}^*=\frac{n}{n_2 H_{A_2}\left[G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]}=\frac{n}{n_2 P\left[X>G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)|A_2\right]} \tag{23}$$

式中：$H_{A_1}(q)=P\left(X>q|A_1\right)=1-F_{A_1}\left(q|A_1,\ \theta_1\right)$；$H_{A_2}(q)=P\left(Y>q|A_2\right)=1-F_{A_2}\left(q|A_2,\ \theta_2\right)$。

反过来，对于年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$，它可以发生在分期A_1，成为事件$\{X>q|A_1\}$，也可以发生在分期A_2，成为事件$\{Y>q|A_1\}$。在分期A_1，$\{X>q|A_1\}$发生数目的期望值为$E\left(N_1^*\right)=n_1 P\left(X>q|A_1\right)$，在分期$A_2$，$\{Y>q|A_2\}$发生数目的期望值为$E\left(N_2^*\right)=n_2 P\left(Y>q|A_2\right)$。

年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$发生数目的期望值为

$$E\left(N\right)=E\left(N_1^*\right)+E\left(N_2^*\right)=n_1 P\left(X>q|A_1\right)+n_2 P\left(Y>q|A_2\right)$$

年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$重现期为

$$T_A=\frac{1}{P\left(A_1\right)P\left(X>q|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(Y>q|A_2\right)}=\frac{1}{P\left(Q>q\right)} \tag{24}$$

式(24)是从分期洪水角度出发，推导年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$的重现期，与式(19)完全相同，也说明了年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$的重现期计算公式是正确的。不难看出，由式(20)—式(24)也可以得到年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$的重现期与分期A_1或A_2形成年最大洪水超过事件重现期的关系式

$$T_A=\frac{T_{A_1}^* \cdot T_{A_2}^*}{T_{A_1}^*+T_{A_2}^*} \tag{25}$$

以上推导了年最大洪水与分期最大洪水重现期间的关系，以下将推导几种分期最大洪水事件的重现期。如果工程破坏可视为超过某一门限洪水值，则以下几种事件的重现期可作为工程发生破坏的重现期，可为年防洪标准与工程发生破坏关系分析提供依据。

4.3　给定分期内最大洪水超过某一洪水事件发生的重现期　对于每一个分期最大洪水序列，它是每年按照给定分期划分选取一个最大值，因此，对于分期最大洪水事件超过概率$G_{A_1}(x)=P\left(X>x\right)$、$G_{A_2}(y)=P\left(Y>y\right)$，$x$和$y$是分期最大洪水，不是年最大洪水。按照式(2)，有重现期T_{A_1}和T_{A_2}

$$T_{A_1}=\frac{1}{G_{A_1}(x)}=\frac{1}{P\left(X>x\right)};\quad T_{A_2}=\frac{1}{G_{A_2}(y)}=\frac{1}{P\left(Y>y\right)} \tag{26}$$

T_{A_1}、T_{A_2}分别是发生在分期A_1和A_2内超过事件的重现期，但是，他们并不是年最大洪水的重现期，如果去掉分期A_1和A_2的条件，式(26)是不成立的。$G_{A_1}(x)=P(X>x)$和$G_{A_2}(y)=P(Y>y)$分别按分期A_1和A_2内最大洪水序列x_1，x_2，…，x_n、y_1，y_2，…，y_n估计分布参数。

式(19)、式(26)表明年最大洪水事件发生的重现期与给定分期最大洪水事件的重现期计算公式形式相同。但是，二者反映的洪水事件不同。式(26)中，当分期A_1和A_2最大洪水为年最大洪水时，其重现期分别为$T_{A_1}=\dfrac{1}{P(X>q)}$，或$T_{A_2}=\dfrac{1}{P(Y>q)}$。但是，$G_{A_1}(q)=P(X>q)$和$G_{A_2}(q)=P(Y>q)$分别为分期$A_1$和$A_2$内最大洪水序列超过概率，式(19)中$G_A(q)=P(Q>q)$为年最大洪水超过概率，三者分布函数值不同。式(19)、式(26)也可以进一步表示年最大洪水事件$\{Q>q\}$发生的重现期对应于分期A_1或A_2内最大洪水事件$\{X>q\}$、$\{Y>q\}$发生的重现期，其关系式为

$$T_{A_1}=\frac{1}{G_{A_1}\left[G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]}=\frac{1}{P\left[X>G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]} \tag{27}$$

$$T_{A_2}=\frac{1}{G_{A_2}\left[G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]}=\frac{1}{P\left[Y>G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right)\right]} \tag{28}$$

因为$G_A(q)>G_{A_1}(q)$，$G_A(q)>G_{A_2}(q)$，所以有$T_{A_1}\geqslant T_A$，$T_{A_2}\geqslant T_A$。也证明了丁晶等[16]“现行分期设计洪水方法采用分期最大洪水选样，根据这种洪水系列计算出的洪水频率本质上不同于全年最大洪水系列推求出的洪水频率。……，分期洪水的重现期一般较年洪水重现期长[1,28]”的结论。

4.4　一年中分期最大洪水至少发生一次超过某一洪水的重现期　这类问题通常假定洪水超过w时，w为分期季节最大洪水。如果洪水超过w视为破坏事件，则这类问题等价于一年内至少发生一次破坏。一年中分期A_1和A_2内至少发生一次超过某一洪水w的重现期为T'_A，其可能发生的事件组合有$\{X\leqslant w,\ Y>w\}$，$\{X>w,\ Y\leqslant w\}$，$\{X>w,\ Y>w\}$。设E_1表示分期A_1和A_2内最大洪水至少发生一次超过洪水w，则$E_1=\{X\leqslant w,\ Y>w\}\cup\{X>w,\ Y\leqslant w\}\cup\{X>w,\ Y>w\}$。根据概率原理，假定分期洪水分布独立，有$P(E_1)=1-P(X\leqslant w,\ Y\leqslant w)=1-P(X\leqslant w)P(Y\leqslant w)$，或$P(E_1)=P(X\leqslant w)P(Y>w)+P(X>w)P(Y\leqslant w)+P(X>w)P(Y>w)=P(X>w)+P(Y>w)-P(X>w)P(Y>w)$。

在T'_A年内，设事件E_1发生数目的期望值为$E(N')$，根据概率原理，$E(N')=T'_AP(E_1)$，则分期最大洪水至少发生一次超过某一洪水w的重现期为$\dfrac{T'_A}{E(N')}$，即

$$T'_A=\frac{1}{1-P(X\leqslant w)P(Y\leqslant w)}=\frac{1}{P(X>w)+P(Y>w)-P(X>w)P(Y>w)} \tag{29}$$

4.5　一年中分期最大洪水发生一次超过某一洪水的重现期　设一年中，分期最大洪水发生一次超过某一洪水w的重现期为T''_A，同样，如果洪水超过w视为破坏事件，则这类问题等价于一年内发生一次破坏。分期A_1和A_2内，分期最大洪水发生一次超过某一洪水w可能发生的事件组合有$\{X\leqslant w,\ Y>w\}$，$\{X>w,\ Y\leqslant w\}$。设E_2表示分期A_1和A_2内最大洪水发生一次超过洪水w，则$E_2=\{X\leqslant w, Y>w\}\cup\{X>w,\ Y\leqslant w\}$。

根据概率原理，假定分期洪水分布独立，有$P(E_2)=1-P(X\leqslant w,\ Y\leqslant w)-P(X>w,\ Y>w)$。在$T''_A$年内，设事件$E_2$发生数目的期望值为$E(N'')$，根据概率原理，有$E(N'')=T''_AP(E_2)$，分期最大洪水发生一次超过某一洪水$w$的重现期为$\dfrac{T''_A}{E(N'')}$。即

$$T''_A=\frac{1}{1-P(X\leqslant w)P(Y\leqslant w)-P(X>w)P(Y>w)} \tag{30}$$

4.6 一年中分期最大洪水发生两次超过某一洪水的重现期 设一年中，分期最大洪水发生两次超过某一洪水w的重现期为T'''_A。与上述类似，这类问题等价于一年内至少发生两次破坏。分期A_1和A_2内，分期最大洪水发生两次超过某一洪水w可能发生的事件组合有$\{X>w，Y>w\}$。设E_3表示分期A_1和A_2内最大洪水发生两次某一洪水w，则$E_3=\{X>w，Y>w\}$。

根据概率原理，假定分期洪水分布独立，有：$P\left(E_3\right)=1-P\left(X\leqslant w，Y\leqslant w\right)-P\left(X\leqslant w，Y>w\right)-P\left(X>w，Y\leqslant w\right)=1-P\left(X\leqslant w\right)P\left(Y\leqslant w\right)-P\left(X\leqslant w\right)P\left(Y>w\right)-P\left(X>w\right)P\left(Y\leqslant w\right)$。

在T'''_A年内，设事件E_3发生数目的期望值为$E\left(N'''\right)$，根据概率原理，有$E\left(N'''\right)=T'''_A P\left(E_3\right)$，分期最大洪水发生两次超过某一洪水$w$的重现期为$\dfrac{T'''_A}{E\left(N'''\right)}$。即

$$T'''_A=\frac{1}{1-P\left(X\leqslant w\right)P\left(Y\leqslant w\right)-P\left(X\leqslant w\right)P\left(Y>w\right)-P\left(X>w\right)P\left(Y\leqslant w\right)} \tag{31}$$

5 应用实例

本文采用南四湖流域1963—2008年分期7日最大入湖洪量资料，说明文中分期洪水重现期计算模型的应用。南四湖位于山东省西南部，属淮河流域沂沭泗水系[30-31]，由微山湖、昭阳湖、独山湖和南阳湖等4个湖组成(见图1[32])，是我国典型的暖温带季风气候区，也是我国北方最大和全国第六大淡水湖。流域降水具有明显的季节性规律，年内分配极不均匀，汛期6—9月降水占全年的75 %以上，其中7、8两月约占全年的57 %。南四湖流域面积31 700 km^2，湖面面积约1266 km^2，东西宽5～22.8 km，南北长122.6 km，湖面中部最窄，具有防洪、排涝、灌溉、供水、养殖、航运及旅游等多种功能，是南水北调东线工程必经之路和重要调蓄场所。

经流域洪水计算，整个汛期划分为主汛期(6月1日—8月20日)和后汛期(8月21日—9月30

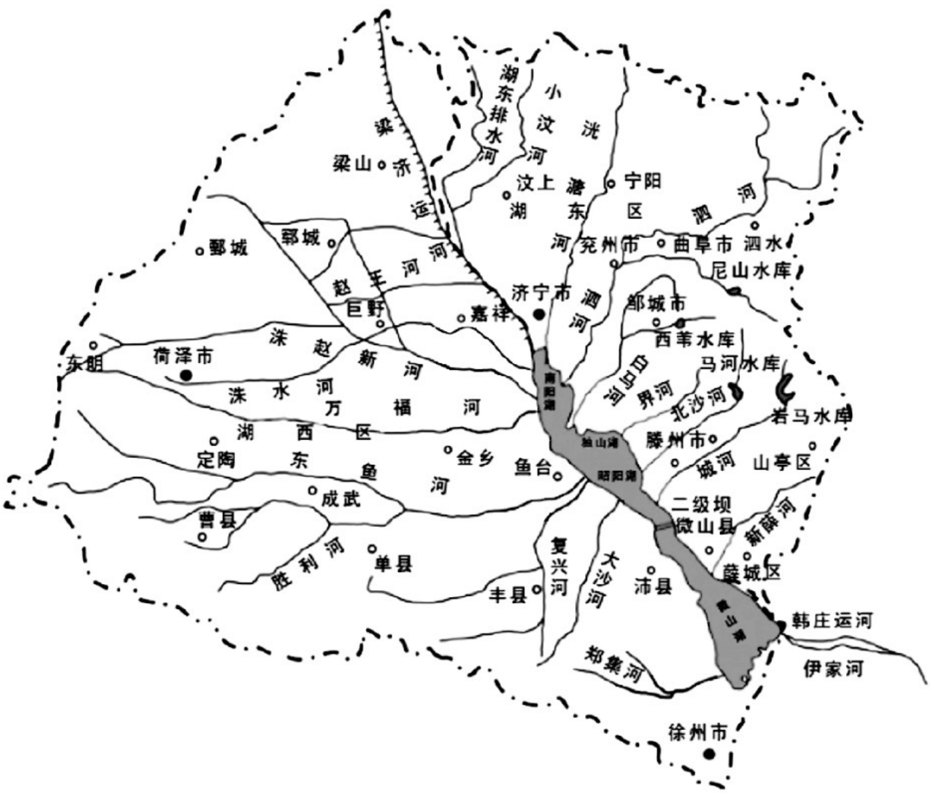


图1 南四湖流域水系示意[32]

日），年最大洪水发生在主汛期和后汛期。按照文献[30–31]分析，年最大洪水、主汛期和后汛期序列均满足洪水频率计算要求。本文由于无法确定分期历史特大洪水，暂不考虑历史特大洪水。分析结果表明，Gamma分布相对拟合较好，因此，本文选用Gamma分布。设主汛期最大7日洪量事件集为A_1，后汛期最大7日洪量事件集为A_2；年最大洪水为Q，主汛期最大7日洪量为X，后汛期最大7日洪量为Y。经计算，年最大7日洪量、主汛期和后汛期最大7日洪量序列的统计参数和分布参数见表1。

$$f(x)=\frac{1}{b^a\Gamma(a)}x^{a-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} \tag{32}$$

式中，a、b分别为形状和尺度参数。

表1 年最大7日洪量、主汛期和后汛期最大7日洪量序列统计参数和分布参数

序列	均值	标准差	a	b
年最大洪水$\{Q\}$	10.7376	6.8752		
主汛期最大洪水$\{X\}$	9.9928	6.3565	2.4209	4.1277
后汛期最大洪水$\{Y\}$	6.0509	6.0342	1.1162	5.4208
发生在主汛期的年最大洪水序列$\{Q\|A_1\}$	10.2935	6.3521	2.5927	3.9703
发生在后汛期的年最大洪水序列$\{Q\|A_2\}$	12.5633	8.9245	2.0096	6.2517

5.1 年最大洪水$\{Q\}$分布计算 年最大洪水$\{Q\}$分布由分期洪水分布来计算。首先采用常规水文频率参数估计方法（矩法、极大似然法、概率权重法、线性矩法和熵值法等）估计分期洪水序列参数，其次，对于给定的年最大洪水超过值q，代入上述3种分期洪水概率计算模型，即可获得年最大洪水分布超过事件概率值$P(Q>q)$。对于式(3)全概率模型，采用主汛期的年最大洪水序列$\{Q|A_1\}$和发生在后汛期的年最大洪水序列$\{Q|A_2\}$序列分布参数，本例经计算$P(A_1)=0.8043$，$P(A_2)=0.1957$。对于式(13)极值分布模型、式(15)混合分布模型，采用主汛期最大洪水$\{X\}$和后汛期最大洪水$\{Y\}$序列分布参数。极大似然法也可以通过构建发生在主汛期的年最大洪水序列$\{Q|A_1\}$和发生在后汛期的年最大洪水序列$\{Q|A_2\}$联合似然函数，主汛期最大洪水序列$\{X\}$和后汛期最大洪水序列$\{Y\}$联合似然函数进行分期洪水序列分布参数估计。

全概率模型的极大似然函数为

$$L_1=\left[P(A_1)\right]^{n_1}\left[P(A_2)\right]^{n_2}\cdot\prod_{i=1}^{n_1}f_{A_1}\left(x_i^*|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1\right)\cdot\prod_{i=1}^{n_2}f_{A_2}\left(y_i^*|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2\right) \tag{33}$$

式中：$f_{A_1}\left(x|A_1,\ \boldsymbol{\theta}_1\right)=\frac{1}{a_1^{b_1}\Gamma(b_1)}x^{b_1-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a_1}}$；$f_{A_2}\left(y|A_2,\ \boldsymbol{\theta}_2\right)=\frac{1}{a_2^{b_2}\Gamma(b_2)}y^{b_2-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{a_2}}$。

极值分布模型和混合分布模型的极大似然函数为

$$L_2=\prod_{i=1}^{n}\left[g_{A_1}\left(x_i,\ \boldsymbol{\theta}_3\right)G_{A_2}\left(y_i,\ \boldsymbol{\theta}_4\right)+G_{A_1}\left(x_i,\ \boldsymbol{\theta}_3\right)g_{A_2}\left(y_i,\ \boldsymbol{\theta}_4\right)\right] \tag{34}$$

式中：$g_{A_1}\left(x,\ \boldsymbol{\theta}_3\right)=\frac{1}{a_3^{b_3}\Gamma(b_3)}x^{b_3-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{a_3}}$；$g_{A_2}\left(y,\ \boldsymbol{\theta}_4\right)=\frac{1}{a_4^{b_4}\Gamma(b_4)}y^{b_4-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{a_4}}$；$G_{A_1}\left(x,\ \boldsymbol{\theta}_3\right)=\frac{1}{a_3^{b_3}\Gamma(b_3)}\int_0^x t^{b_3-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a_3}}\mathrm{d}t$；

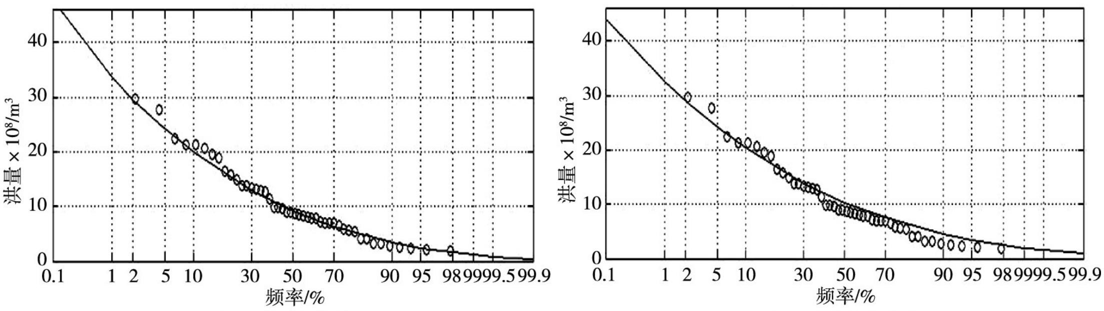
$G_{A_2}\left(y,\ \boldsymbol{\theta}_4\right)=\frac{1}{a_4^{b_4}\Gamma(b_4)}\int_0^y t^{b_4-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{a_4}}\mathrm{d}t$。

5.2 年最大洪水超过事件$\{Q>q\}$设计值计算 如果年最大洪水$\{Q\}$分布概率函数确定下，也可直接利用式(19)的逆函数求得设计值q_T，即

$$q_T = G_A^{-1}\left(\frac{1}{T_A}\right) \tag{35}$$

给定年最大值超过事件$\{Q > q\}$重现期T_A下，$P(Q > q) = \frac{1}{T_A}$，由于式(14)—式(15)和式(18)为设计值q_T的隐函数，不能直接计算q_T。因此，设计值q_T可按式(14)—式(15)和式(18)利用迭代法求得对应的设计值。

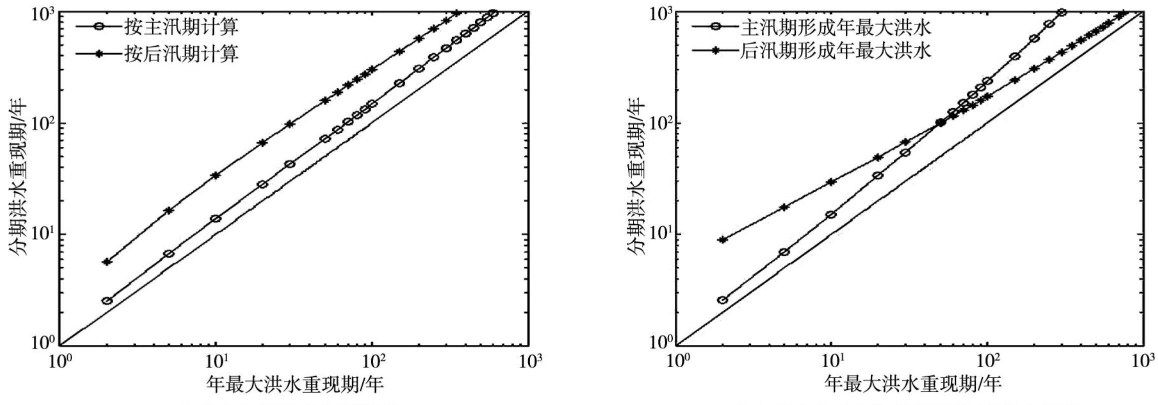
经计算，主汛期和后汛期最大7日洪量序列分布参数如表1所示，经迭代法计算，年最大洪水分布拟合图见图2。从图2可以看出，年最大洪水分布取得较好的拟合效果。



（a）全概率模型　　（b）极值分布模型

图2　年最大洪水序列频率拟合

5.3　年最大洪水超过事件$\{Q > q\}$重现期与分期发生最大洪水超过事件重现期的关系　在上述年最大洪水分布拟合的基础上，图3给出了年最大洪水重现期与等值的分期最大洪水重现期间的关系图(对数坐标表示)。图3(a)为给定年最大洪水重现期下T_A，与年最大洪水设计值q_{T_A}等值的洪水分别按主汛期和后汛期洪水分布重现期模型计算的重现期。从图3(a)可以看出，主汛期、后汛期重现期大于年洪水重现期，这与丁晶等[16]的结论是相同的。给定年最大洪水重现期下T_A，其相应的年最大洪水设计值q_{T_A}按发生在主汛期、后汛期的年最大洪水重现期模型计算重现期见图3(b)。图3(b)也表明主汛期、后汛期重现期大于年洪水重现期。



（a）按分期洪水分布模型　　（b）按分期最大洪水形成年最大洪水模型

图3　年最大洪水重现期与等值的分期最大洪水重现期关系

5.4　蒙特卡洛试验　应用蒙特卡洛试验验证文中分期洪水重现期计算模型。取模拟样本组数$N = 1000$，样本长度$n = 10\,000$，按照上述模型，经模拟计算，样本经验重现期与文中模型理论重现期见图4—图7(对数坐标表示)。从图中可以看出，样本经验重现期与文中模型理论重现期一致，说明文中推导有关分期洪水重现期计算模型是正确的。

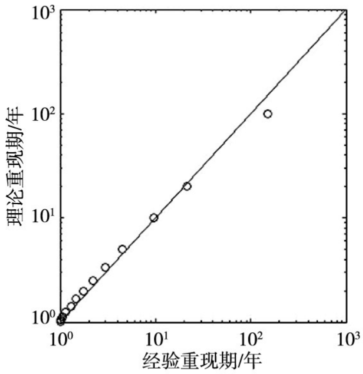
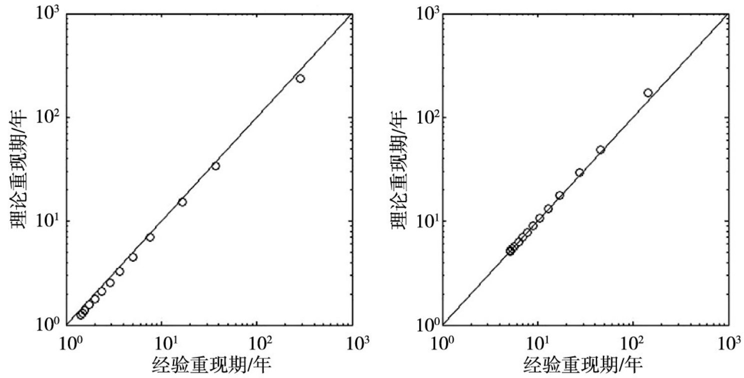
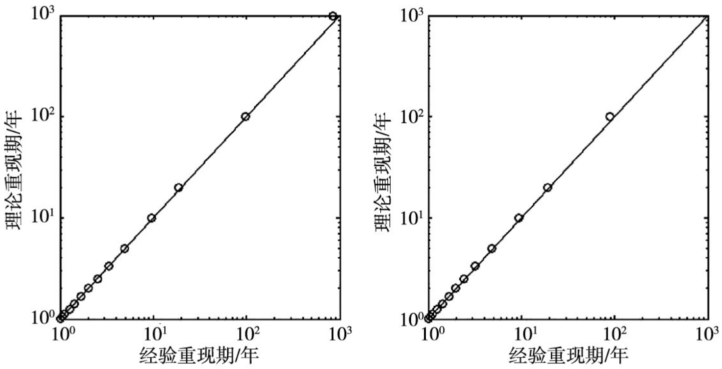


图 4　年最大洪水重现期模拟



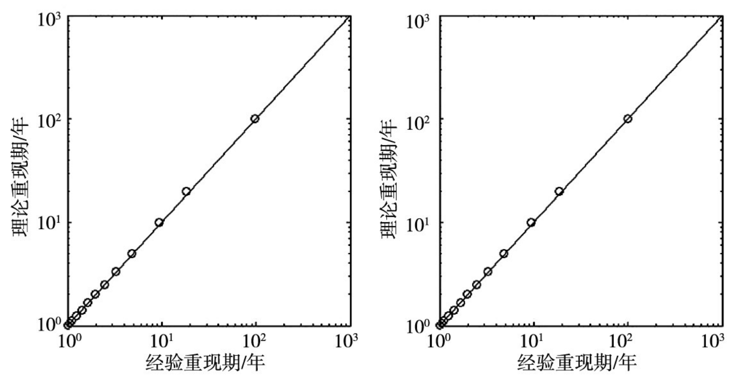
（a）年最大洪水发生在主汛期　（b）年最大洪水发生在后汛期

图 5　分期最大洪水发生年最大洪水的重现期模拟



（a）主汛期最大洪水　（b）后汛期最大洪水

图 6　分期最大洪水重现期模拟



（a）至少发生一次　（b）发生两次

图 7　一年中分期最大洪水超越某一值的重现期模拟

6 结论

分期设计洪水是水库安全防洪、提高兴利效益和洪水资源安全利用的重要依据。分期设计洪水的数学期望推导是非常复杂的，难以获得解析计算公式。本文应用概率原理，结合分期洪水事件的特性，从重现期的定义出发，推导了水文事件重现期计算公式，在此基础上，推导了分期洪水计算中几种常见事件的重现期计算公式，以期为分期设计洪水计算提供支撑。取得以下主要研究结论。

(1)年最大洪水与分期最大洪水由于其选样不同，虽然重现期计算公式形式相同，但是，其表达的物理意义不同，年最大洪水超过事件概率倒数与分期最大洪水超过事件概率倒数表示的重现期大小不同。分期发生年最大洪水值的重现期大于该年最大洪水值的重现期。

(2)一些流域年最大洪水可能是由暴雨、融雪和飓风形成的，因而，洪水分布通常为混合分布，即非一致性序列，不能按照常规的水文频率分析方法直接按年最大洪水序列计算分布参数，必须按照年最大洪水概率与分期最大洪水概率的关系模型来计算确定。

(3)蒙特卡洛试验结果表明，文中推导的有关分期最大洪水重现期与经验重现期一致，表明文中有关分期最大洪水重现期计算模型是正确的。

(4)对于具有历史特大分期洪水值的地区，为了提高洪水计算精度，分期洪水分布参数估计应考虑历史特大洪水值。文中模型是假定分期最大洪水独立同分布，各分期最大洪水也相互独立，对于相依性分期最大洪水的重现期计算有待于进一步研究。

参 考 文 献：

[1] 方彬，郭生练，刘攀，等. 分期设计洪水研究进展和评价[J]. 水力发电，2007，33(7)：70-75.
[2] 郭生练，刘章君，熊立华. 设计洪水计算方法研究与展望[J]. 水利学报，2016，47(3)：302-314.
[3] 水利部. 水利水电工程设计洪水计算规范：SL44-2006[S]. 北京：中国水利水电出版社，2006.
[4] 朱元甡，张世法. 用二维概率分布函数计算分期设计洪水[J]. 华东水利学院学报(水文分册)，1963(S2)：69-82.
[5] BUISHAND T A, DEMARÈ G R. Estimation of the annual maximum distribution from samples of maxima in separate seasons[J]. Stochastic Hydrology Hydraulics，1990(4)：89-103.
[6] DURRANS S R, EIFFE M A, THOMAS W O, et al. Joint seasonal /annual flood frequency analysis[J]. Journal of Hydrologic Engineering，2003，8(4)：181-189.
[7] McCUEN R H, BEIGHLEY R E. Seasonal flow frequency analysis[J]. Journal of Hydrology，2003，279：43-56.
[8] FANG B, GUO S L, WANG S X, et al. Non-identical models for seasonal flood frequency analysis[J]. Hydrological Sciences Journal，2007，52(5)：974-991.
[9] STRUPCZEWSKI W G, KOCHANEK K, FELUCHB W, et al. On seasonal approach to nonstationary flood frequency analysis[J]. Physics and Chemistry of the Earth，2009，34：612-618.
[10] CHEN L. A new seasonal design flood method based on bivariate joint distribution of flood magnitude and date of occurrence[J]. Hydrological Sciences Journal，2010，55(8)：1264-1280.
[11] BARATTI E, MONTANARI A, CASTELLARIN A, et al. Estimating the flood frequency distribution at seasonal and annual time scales[J]. Hydrology and Earth System Sciences，2012(16)：4651-4660.
[12] STRUPCZEWSKI W G, KOCHANEK K, BOGDANOWICZ E, et al. On seasonal approach to flood frequency modelling. Part Ⅰ：Two-component distribution revisited[J]. Hydrological Processes，2012，26：705-716.
[13] STRUPCZEWSKI W G, KOCHANEK K, BOGDANOWICZ E, et al. On seasonal approach to flood frequency modelling. Part Ⅱ：flood frequency analysis of Polish rivers[J]. Hydrological Processes，2012，26：717-730.
[14] CHEN L, SINGH V P, GUO S L, et al. A new method for identification of flood seasons using directional statistics [J]. Hydrological Sciences Journal，2013，58(1)：28-40.
[15] 丁晶，侯玉. 随机模型估算分期设计洪水的初探[J]. 成都科技大学学报，1988，41(5)：93-98.
[16] 丁晶，王文圣，邓育仁. 合理确定水库分期汛限水位的探讨[C]//全国水文计算进展和展望学术讨论会论文

集 . 南京：河海大学出版社，1998 .
[17] 王善序 . 设计洪水与洪水季节性[J] . 水文科技信息，1994，11(2)：1-5 .
[18] 王善序 . T年一遇水库汛期分期设计洪水[J] . 水资源研究，2005，6(4)：11-13 .
[19] 王善序 . T年一遇水库汛期分期设计洪水问题探讨[J] . 水文，2007，27(3)：16-19 .
[20] 王善序 . 水库汛期分期设计洪水研究评述[J] . 水资源研究，2011，32(3)：10-11 .
[21] 邹鹰 . 分期设计洪水标准计算方法研究 [J] . 水文，2007，27(2)：54-56 .
[22] 张涛，赵培青，李光吉，等 . 分期设计洪水的合理性分析[J] . 水电能源科学，2011，29(2)：35-37 .
[23] 郭生练 . 设计洪水研究进展与评价[M] . 北京：中国水利水电出版社，2005 .
[24] 方彬，郭生练，王善序 . 河流汛期分期设计洪水频率分析[J] . 人民长江，2005，36(11)：37-39 .
[25] 刘攀，郭生练，肖义，等 . 浅析分期设计洪水与年最大设计洪水的关系[J] . 人民长江，2007，38(6)：27-28 .
[26] 肖义，郭生练，刘攀，等 . 分期设计洪水频率与防洪标准关系研究[J] . 水科学进展，2008，19(1)：54-60 .
[27] 陈璐，郭生练，闫宝伟 . 一种新的分期设计洪水计算方法[J] . 武汉大学学报(工学版)，2010，43(1)：20-24 .
[28] 刘攀，郭生练，闫宝伟，等 . 再论分期设计洪水频率与防洪标准的关系[J] . 水力发电学报，2011，30(1)：187-192 .
[29] 宋松柏，金菊良 . 单变量独立同分布水文事件重现期计算原理与方法[J] . 华北水利水电大学学报，2017，27(2)：54-56 .
[30] 山东省淮河流域水利管理局规划设计院，南京水利科学研究院 . 面向湖泊生态修复的流域水资源调控关键技术开发与示范[R] . 南京：南京水利科学研究院，2012 .
[31] 南京水利科学研究院 . 水库群汛期运行水位设计技术[R] . 南京：南京水利科学研究院，2017 .
[32] 邓坤，张璇，谭炳卿，等 . 多目标规划法在南四湖流域水资源优化配置中的应用[J] . 水科学与工程技术，2010(5)：11-15 .

Models of the return period calculation for seasonal flood

SONG Songbai[1], CHENG Liang[2], WANG Zongzhi[2]

(1. *College of Water Resources and Architecture Engineering*, *Northwest A & F University*, *Yangling* 712100, *China*;
2. *Hydrology and Water Resources Department*, *Nanjing Hydraulic Research Institute*, *Nanjing* 210029, *China*)

Abstract: Annual maximum flood and seasonal maximum flood sequences are two different type samples. Their return periods and design values are very important to operate flood control safely, improve benefit and utilize flood resources of reservoirs. According to the definition of the return period, using mathematical statistics, return period formulas of independent and identically distributed variable and multivariable hydrologic events were derived. Then, the return period calculation models of annual maximum flood and maximum flood of seasonal flood were presented. Employed the Monte Carlo test, the return periods are consistent with the empirical return periods. These results indicate that the return period models derived in this paper are correct. Finally, taking the 7 days maximum flood volume of Nansi Lake during 1963-2008 as an example, the formulas of parameters estimation of seasonal maximum flood and probability distribution of annual maximum flood were given, illustrating the calculation problem of the design seasonal maximum flood. The models and calculation methods in this paper are expected to provide theoretical support for the design seasonal flood calculation in China.

Keywords: seasonal flood; return period; total probability; mixed distribution; maximum value distribution

（责任编辑：王成丽）