

文章编号:0559-9350(2020)08-0947-10

## 混凝土类材料弹塑性损伤问题的全隐式迭代法

张立<sup>1</sup>, 李广凯<sup>1</sup>, 马怀发<sup>2,3</sup>

(1. 山东泰山抽水蓄能电站有限责任公司, 山东 泰安 271000)

(2. 中国水利水电科学研究院 流域水循环模拟与调控国家重点实验室, 北京 100038)

(3. 中国水利水电科学研究院 工程抗震研究中心, 北京 100048)

**摘要:** 弹塑性全隐式迭代法将联立隐式迭代求解屈服条件、塑性流动方程和平衡方程。为了提高算法的收敛性, 本文在迭代过程中引入了屈服应力的局部回映迭代。考虑到混凝土弹塑性损伤模型既可反映其塑性(不可恢复)变形又可反映其材料刚度的损伤弱化, 因此可将混凝土类材料弹塑性损伤问题分解为弹塑性和损伤问题, 应用弹塑性全隐式迭代法在有效应力空间计算弹塑性变形, 再基于应变等效的原则, 并通过损伤参数将有效应力转换为物理空间的实际应力。由此形成了混凝土类材料弹塑性损伤问题的全隐式迭代法。通过混凝土试件弯拉损伤破坏过程的数值模拟验证了该算法。数值计算表明, 在有效应力空间的塑性变形处于强化状态下, 损伤参数的大小只会影响实际应力, 而不会影响塑性变形迭代求解的稳定性。另外, 本文提出的全隐式迭代法可用于求解混凝土坝及其坝基岩体的弹塑性损伤问题。由于隐式迭代格式以全量的形式给出, 在分析高混凝土坝非线性地震响应时, 也可以全量的形式输入地震动荷载。

**关键词:** 混凝土类材料; 非线性; 弹塑性损伤; 屈服函数; 隐式迭代法

**中图分类号:** TV311; TU311

**文献标志码:** A

**doi:** 10.13243/j.cnki.slxb.20200080

## 1 研究背景

混凝土类材料一般具有初始微缺陷或微孔洞, 在外载荷作用下混凝土类材料内部的微孔洞、微裂纹等初始缺陷延长、扩展、交汇, 从而形成微裂缝。微裂缝引起材料刚度劣化和强度降低。同时, 微裂缝界面的摩擦滑动引起类似于金属材料的晶格位错, 产生不可恢复残余(塑性)变形<sup>[1-3]</sup>。基于金属晶体滑移或位错发展起来的弹塑性力学, 能够较好地描述混凝土类材料的弹性变形、破坏条件以及不可恢复变形的演化发展。尽管混凝土类材料的破坏机理与金属材料有所不同, 但塑性理论在处理不可恢复变形具有显著优势, 且损伤力学可以很好地描述其内部微缺陷或微裂缝的演化规律及其对其宏观力学性能的影响, 二者结合形成的弹塑性损伤模型可以全面地描述混凝土类材料的非线性变形特征<sup>[4-6]</sup>。弹塑性问题是典型的材料非线性问题, 其应力一般与变形或加载历史有关, 需要采用增量法求解。因此, 增量应力应变本构方程与迭代法相结合被广泛应用于求解弹塑性问题。牛顿-拉斐逊法包括N-R和mN-R算法, 是求解非线性方程组最常用的增量迭代法。人们为了改善收敛速度提出了各种加速迭代的措施, 艾特肯加速法<sup>[7]</sup>和线性搜索法<sup>[8-11]</sup>与牛顿法结合使用, 以减少计算迭代次数。但这些算法都需要刚度矩阵显式表达形式, 往往还受限于本构方程的积分形式。与上述方法不同的是, 弹塑性隐式全迭代法<sup>[12]</sup>能够联立求解弹塑性问题的平衡方

收稿日期: 2020-02-17; 网络首发时间: 2020-08-21

网络首发地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20200820.1712.004.html>

基金项目: 国家自然科学基金项目(51679265); 中国水利水电科学研究院“十三五”重点专项(EB0145B412016); 国家电网新源公司项目(SGXYKJ-2019-011)

作者简介: 张立(1979-), 高级工程师, 主要从事抽水蓄能电站水工运行管理研究。E-mail: 615719332@qq.com

通讯作者: 马怀发(1962-), 博士, 教授级高级工程师, 主要从事计算力学、水工结构抗震及混凝土动态性能等研究。

E-mail: mahf@iwhr.com

程、屈服函数和塑性流动方程，不需要刚度矩阵的显式形式，也不拘泥于变形的增量和全量形式，并且不受屈服函数和塑性流动方程具体形式的限制，可扩展应用于求解混凝土类材料的非线性问题。

在极限荷载作用下，混凝土类材料的非线性变形一般伴随着损伤演化和塑性流动的过程，即为弹塑性损伤过程。基于应变等效假定<sup>[13-15]</sup>，在有效应力空间利用塑性力学方法，用有效应力张量代替经典塑性力学中的柯西(名义/实际)应力张量，以考虑不可恢复变形。由于有效应力随着弹性应变的增加而单调增加，屈服面处于膨胀状态，不会出现柯西应力空间材料软化所导致的屈服面收缩情况，因此，只需考虑应力强化，避开了处理应变软化的问题。

本文首先介绍弹塑性问题的全隐式迭代法的基本思想，再引入局部回映迭代，以改进其收敛性。然后，基于混凝土类材料弹塑性损伤变形特性及其在有效应力空间应力强化的特点，将混凝土类材料弹塑性损伤问题分解为弹塑性问题和损伤问题。在有效应力空间上采用弹塑性全隐式迭代法求解其弹塑性变形，由损伤参数描述材料刚度的弱化，并将有效应力转换为物理空间的实际(名义)应力。这种求解方法即为本文提出的混凝土类材料弹塑性损伤问题的全隐式迭代法。

## 2 全隐式迭代法的基本思想

弹塑性材料的本构关系通常由屈服函数和流动规律以增量形式给出。本构关系一般表示为一种显式形式， $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ，其中的 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别为应力增量和应变增量， $\mathbf{D}^{ep}$ 为弹塑性矩阵。弹塑性矩阵与加载过程有关，将根据应力应变状态进行调整。本文提出的全隐式迭代法的基本思想是将含有塑性因子未知量的屈服条件和塑性流动方程作为基本方程，并与平衡方程联立，通过隐式迭代求解变形及其相关物理量。假设 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 和 $\Delta\lambda_n$ 分别是第 $n$ 个加载步的应变、塑性应变、应力和塑性因子。在 $n+1$ 个加载步，求解描述弹塑性问题的方程组为：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{F}_{n+1}, \delta\mathbf{u}) & \text{平衡方程 (矢量方程)} \\ Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = 0 & \text{屈服函数 (标量方程)} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta\lambda_n \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{塑性流动函数 (矢量方程)} \end{cases} \quad (1)$$

式中： $Y$ 为屈服函数，是应力和内变量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的函数； $G$ 为塑性流动势函数； $\mathbf{F}$ 为外分布荷载。

联立方程组(1)中的第一个方程表示内力虚功 $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \delta\boldsymbol{\varepsilon})$ 等于外力虚功 $(\mathbf{F}_{n+1}, \delta\mathbf{u})$ ，其中符号 $(*, *)$ 表示两个函数“\*”的内积，在本文中，粗体表示向量或矩阵。在迭代过程中，如果屈服函数的值不在屈服面上，即 $Y_n \neq 0$ ，可以通过第二个方程自动修正，迭代直至屈服函数值满足屈服条件 $Y_{n+1} = 0$ ，应力返回屈服面。

在 $n+1$ 加载步的应变增量为 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 、塑性应变增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ 、内变增量 $\Delta\boldsymbol{\kappa}_n$ 和应力增量 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_n$ ，则总应变、塑性应变、应力以及内变量分别表示为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n; \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p; \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_n; \boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\boldsymbol{\kappa}_n \quad (2)$$

令 $\Delta\boldsymbol{\kappa}_n = \Delta\lambda_n H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ ，这里 $H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ 定义为强化函数，因此应力分量可表示为：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}^e (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) = \mathbf{D}^e \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\lambda_n \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{D}^e$ 为弹性矩阵。

将 $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1})$ 在 $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$ 展开为：

$$Y(\boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n + \Delta\boldsymbol{\kappa}_n) = Y_n + \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\lambda_n \left\{ \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \right\} = 0 \quad (4)$$

令：

$$A_0 = \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad (5)$$

塑性因子的计算公式为：

$$\Delta \lambda_n = \frac{1}{A_0} \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n + Y_n \right] \quad (6)$$

将式(6)代入式(3)，可以得到：

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \left[ \mathbf{D}^e - \frac{1}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n - \frac{Y_n}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (7)$$

即：

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}^{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n - \frac{Y_n}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (8)$$

其中弹塑性矩阵为：

$$\mathbf{D}^{ep} = \left[ \mathbf{D}^e - \frac{1}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \right] \quad (9)$$

如果 $Y_n = 0$ ，应力增量为：

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D}^{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (10)$$

式(1)中的第一个方程即平衡方程，可以表示为：

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) = (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) \quad (11)$$

将式(3)代入式(11)，可以得到：

$$(\mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) - \left( \Delta \lambda_n \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) = (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) \quad (12)$$

将式(6)代入式(12)，并消去 $\Delta \lambda_n$ ，就得到求解弹塑性问题基本方程的积分弱解形式：

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) = \\ & \left( \frac{1}{A_0} Y_n, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) + (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 弹塑性问题的全隐式迭代法

**3.1 求解弹塑性方程的隐式迭代格式** 式(13)是式(1)的等价弱解形式。在弹性加载或塑性卸载时，塑性因子 $\Delta \lambda_n$ 小于零，则将式(13)就转化为线性弹性方程： $(\Delta \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) = (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\delta \varepsilon})$ ；当应力状态处于塑性区时，塑性因子 $\Delta \lambda_n$ 大于零，则需要求解弹塑性方程。

在每一加载步内，保持外部荷载为常量，第 $k$ 迭代步的方程(13)有如下形式<sup>[12]</sup>：

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) = \left( \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \\ & \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) + \left( \frac{1}{A_0} Y_{n+1}^{(k-1)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) + (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

在式(14)中， $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ 分别表示在当前荷载 $\mathbf{F}_{n+1}$ 作用下，第 $(k-1)$ 步和第 $k$ 步迭代步的总应变，总位移 $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$ 可以由式(14)求得。在当前荷载步的位移增量为 $\Delta \mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{u}_n$ 和应变增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 。将 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)}$ 代入下式，计算得到当前荷载步的总应力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ ：

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)} - \frac{1}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)} - \frac{1}{A_0} \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} Y_n(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) \quad (15)$$

传统的弹塑性问题求解，一般按式(8)计算弹塑性矩阵，按式(9)求解应力增量。与传统方法不同，本文的隐式迭代法不需用显式求出弹塑性矩阵，总应力和应力增量在迭代过程结束由式(15)自动给出。式(14)的迭代格式是全量的形式，这样在解决实际问题时其边界条件可以用全量的形式给出。

**3.2 回映迭代法** 上述迭代法认为，当  $Y_{n+1}^{(k-1)}$  时可以通过平衡方程迭代式的右端项  $\left( \frac{1}{A_0} Y_{n+1}^{(k-1)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon} \right)$  拉回到屈服面，即当迭代式(14)收敛时，如果  $Y_{n+1}^{(k)} \rightarrow 0$ ，则  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}$ ，且有  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ，即可得到方程的平衡形式： $(\mathbf{F}_{n+1}, \delta \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ 。当应力进入屈服状态，迭代过程实质上是应力回归屈服面的过程，也是应力重分布的过程。

如图1所示的受集中荷载作用的简支梁，梁跨度为  $2l$ ，高度为  $2h$ ，厚度为  $b$ ，跨中受集中荷载  $P$  作用，若梁的材料为理想弹塑性，并服从 Mises 屈服准则，按照塑性理论可知，当梁跨中横截面弹性高度  $h_e = h$ ，即跨中横截面完全处于弹性状态，弹性极限弯矩  $M = M_e = 2bh^2\sigma_s/3$ ；当  $h_e = 0$ ，即跨中横截面处于完全塑性状态，已形成塑性铰，此时塑性极限弯矩  $M = M_p = bh^2\sigma_s$ ，则有  $M_p/M_e = 1.5$ 。在塑性极限弯矩作用下形成塑性铰时，有如图1所示的屈服塑性区。其塑性区边界为  $h_e = h\sqrt{3x/l}$ ，在梁的上、下边缘离跨中距离  $x = l/3$  处， $h_e = h$ ，塑性区在上下边缘的宽度为梁长度的  $1/3$ 。但按式(14)模拟得到如图2的屈服塑性区，由于应力过于集中，超极限应力不再收敛到屈服面，此时的计算得到塑性区与理论解差别较大。

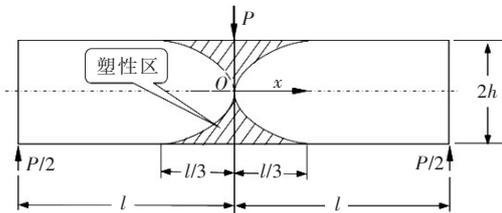


图1 集中荷载作用下简支梁的理论塑性区分布



图2 集中荷载作用下数值迭代不收敛的塑性区

分析其原因，可能是由于式(14)是针对全区域的迭代，很难保证应力过于集中的局部小范围屈服函数  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = 0$  得到精确满足。为了使屈服应力回归到屈服面，改善  $Y_{n+1}^{(k)} \rightarrow 0$  的收敛性，下面将在迭代式(13)中增加了应力在屈服点的回映迭代，即回映算法。

回映算法实质上是一种弹性预测和塑性修正过程，需要局部迭代调整塑性因子，使预测应力返回到屈服面<sup>[16]</sup>。这里的回映迭代式采用了半隐式向后欧拉方法<sup>[17]</sup>，其具体步骤如下所述。

(1) 步骤1。给定  $n+1$  步的初始条件： $\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}\} = \{\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{u}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{\kappa}_n\}$ ，计算  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{D}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$ ，令  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}\}$ 。

(2) 步骤2。计算  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_n)$ ，判断应力屈服状态。

① 如果  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_n) \leq 0$ ，应力处于弹性加载或卸载状态，不需要局部迭代，令  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ， $\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n$ ， $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ ，转到第(3)计算  $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$ ，并更新应力。

② 如果  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_n) > Tol$ ，本文取  $1.0 \times 10^{-16}$ ，认为应力处于塑性加载状态，进行局部回映迭代修正

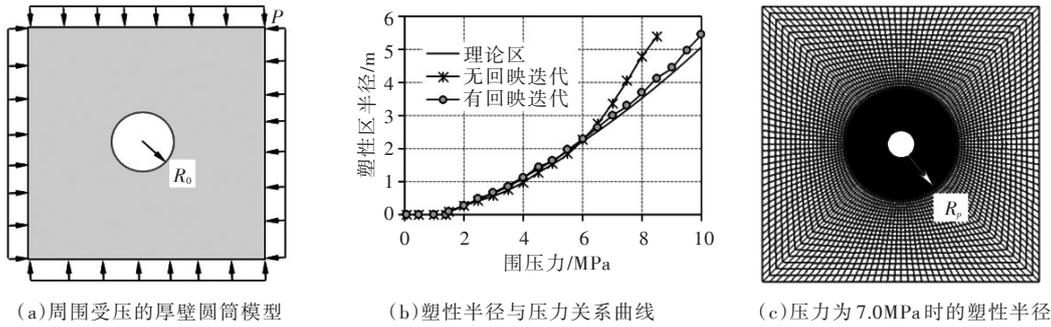


图3 周围受压的圆形隧洞的塑性区

$(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$ , 具体为: (a)计算  $A_0 = \left( \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\kappa}}$ ,  $\delta \lambda_n = \frac{1}{A_0} Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_n)$ ; (b)如果  $\delta \lambda_n > 0$ , 计算  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \delta \lambda_n \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\delta \boldsymbol{\kappa}_n = \delta \lambda_n H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ ; (c)更新  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(l)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(l)} = \boldsymbol{\kappa}_n + \delta \boldsymbol{\kappa}_n$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(l)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{D}^e \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ , 其中  $l$  为局部迭代次数; (d)计算  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(l)}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(l)})$ , 如果  $Y(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(l)}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{(l)}) > Tol$ , 在进行局部回映迭代, 否则, 回到全局迭代式(14)。

(3)步骤3。由式(14)求解位移  $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$ , 由式(15)更新应力  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ 。

**3.3 弹塑性全隐式迭代法的验证 算例1。**在隧洞开挖时岩体伴随应力重分布, 隧洞周边局部可能进入塑性状态, 其受力变形状态可以等同于厚壁圆筒, 外部受均匀压力, 如图3(a)所示。在围压  $p$  作用下, 如岩体满足 Mohr-Coulomb 准则屈服条件, 隧洞半径为  $R_0$  的圆孔周围塑性区半径具有理论解:

$$R_p = R_0 \left( \frac{p + c \cdot \cot \phi}{c \cdot \cot \phi} (1 - \sin \phi) \right)^{\frac{1 - \sin \phi}{2 \sin \phi}}$$

其中,  $c$  为岩体的黏聚强度,  $\phi$  为岩体的内摩擦角。本算例中, 圆形孔口半径  $R_0$  为 1 m, 若黏聚强度  $c$  取 1.0 MPa, 摩擦系数  $f$  即  $\tan \phi$  取 0.2。按弹塑性全隐式迭代法采用两种方案求解, 即分别采用和不采用局部回映迭代, 计算得到图3(b)所示的塑性半径与压力关系曲线。由该曲线可以看出, 施加外部周边压力至 6.5 MPa 之前, 两种方案得到的塑性半径与压力关系曲线, 与理论曲线基本一致。但在压力值大于 6.5 MPa 之后, 采用局部回映迭代的数值解与理论解仍然吻合较好。图3(c)给出了在外部周边压力达到 7.0 MPa 时, 采用局部回映迭代得到的塑性区分布情况, 此时塑性半径  $R_p$  为 3.0 m, 与理论值基本一致。

**算例2。**仍以如图1所示的简支梁为例, 设梁材料的弹性模量取 1GPa, 泊松比取 0.25, 并为理想弹塑性材料, 服从 Mises 屈服准则, 屈服应力  $\sigma_s$  取 2.7 MPa。在上、下边缘正应力刚达到屈服, 此时的荷载定义为  $P_s$ , 即有  $M_e = \frac{P_s l}{2} = 2bh^2 \sigma_s / 3$ , 令  $b = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ ,  $l = 0.6 \text{ m}$ , 则  $P_s = \frac{4bh^2 \sigma_s}{3l} =$

$$\frac{4 \times 1 \times 0.1^2 \times 2.7 \times 10^6}{3 \times 0.6} = 60 \text{ kN}。$$

用  $0.1P_s$  增量荷载进行静态数值模拟, 加载至  $1.5P_s$ , 即  $M_p / M_e = 1.5$  时, 计算得到塑性区分布如图4所示。与如图1所示的理论塑性区分布相比, 此时计算得到的塑性区分布与理论塑性区分布

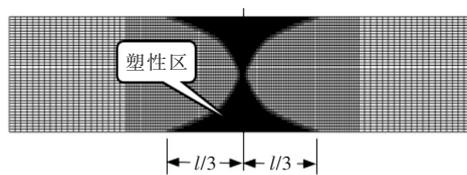


图4 集中荷载作用下的塑性区数值模拟

几乎完全相同。与图2的计算结果相比可以看出，采用局部回应迭代后使迭代收敛性得到了大大的改善。

以上数值计算是在配置为 Intel Core i5-2400 CPU@3.10GHz，MEM 2.99GB的PC机上进行的。在上面的算例中，平衡迭代误差  $err = \left\| \Delta \mathbf{u}_n^{(k)} - \Delta \mathbf{u}_n^{(k-1)} \right\| \leq 10^{-8}$ ，屈服函数控制在  $\left| f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_n) \right| \leq 10^{-7}$ 。简支梁有限元数值模型共有 13 202 个自由度，15 个加载步，耗时不到 3 min；平衡迭代最多需要 15 次迭代；局部迭代只需 3 或 4 次即可趋近于零。这说明本文提出的迭代法具有较高的计算效率，并且迭代稳定性良好。

#### 4 弹塑性损伤问题的全隐式迭代法

**4.1 求解弹塑性损伤方程的隐式迭代式** 在有效应力空间中，有效应力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  取代实际(名义)应力  $\boldsymbol{\sigma}$ 。按照应变等效假设，在实际物理空间里的实际应力  $\boldsymbol{\sigma}$  可用损伤参数  $d$  和有效应力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  表示为  $\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 。混凝土非线性变形的分解，及其与弹性塑性损伤的关系如图5所示， $E_0$  为初始弹性模量， $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$  为极限弹性强度， $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  为与极限弹性强度对应的极限应变，即有  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0/E_0$ ， $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  为塑性应变(残余应变)， $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$  为弹性应变。由于有效应力随弹塑性应变的增加而单调增加，因此屈服面总是膨胀状态，因此，实际物理空间里的材料变形软化不会导致有效应力空间的屈服面收缩。

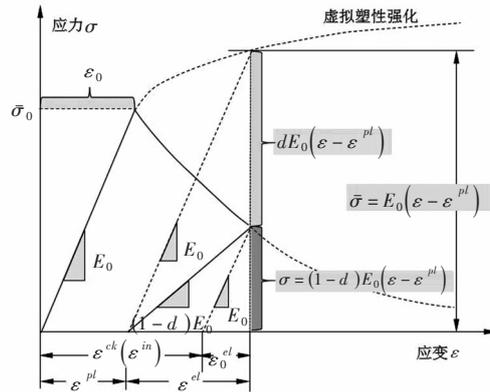


图5 混凝土非线性变形与弹性塑性损伤的关系

由于有效应力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  和塑性变形满足塑性理论的屈服准则、强化法则、加载-卸载准则和流动准则，因此，第3节的弹塑性问题的全隐式迭代法可以移植到有效应力空间。在每一加载步内，保持外部荷载  $\mathbf{F}_{n+1}$  为常量，在第  $k$  迭代步的迭代式(14)可以改写为如下求解弹塑性损伤方程问题的隐式迭代式：

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{D}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_n \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) = \\ & \left( \mathbf{D}_n \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_n \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) + (\mathbf{F}_{n+1}, \boldsymbol{\delta u}) - \left( \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

名义应力  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k-1)} = (1-d_n)\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k-1)}$ ，当前时步的弹性矩阵  $\mathbf{D}_n = (1-d_n)\mathbf{D}_0^e$ ，其中， $\mathbf{D}_0^e$  为初始弹性矩阵，因此，式(16)可写为：

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) = \left( \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) - \\ & \left( \frac{1}{A_0} \left( \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k-1)}, \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^T \mathbf{D}_0^e \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) + (\mathbf{F}_{n+1}/(1-d_n), \boldsymbol{\delta u}) - \left( \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k-1)}, \boldsymbol{\delta \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

这里屈服函数和塑性势函数分别是有效应力  $\bar{\sigma}$  和内变量  $\kappa$  函数，即  $Y \sim Y(\bar{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1})$  和  $G \sim G(\bar{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1})$ ，并认为混凝土材料的损伤参数  $d(\epsilon^p)$ 、屈服峰后拉应力  $\sigma_t(\epsilon^p)$  和压应力  $\sigma_c(\epsilon^p)$  为塑性应变的函数，因此，在求解式(17)时，先在有效应力空间里，按照第3节的弹塑性迭代法求解，即给定  $n+1$  加载步的初始状态： $\{\sigma_{n+1}, u_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1}, d_{n+1}\} = \{\sigma_n, u_n, \epsilon_n^p, \kappa_n, d_n\}$ ，按照式(17)迭代，结束得到  $(\sigma_{n+1}, u_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1})$ ，然后根据  $\epsilon_{n+1}^p$ ，更新损伤参数  $d_{n+1}(\epsilon_{n+1}^p)$  和屈服峰后应力  $\sigma_t(\epsilon_{n+1}^p)$  和  $\sigma_c(\epsilon_{n+1}^p)$ 。

另外，式(17)的迭代式是以全量的形式给出，这样应用该方法分析高坝地震响应时，可以方便地以全量的形式输入地震动荷载。

**4.2 弹塑性损伤全隐式迭代法的验证** 屈服准则采用 Lee 和 Fenves<sup>[18-19]</sup> 基于 Lubliner 等<sup>[20]</sup> 提出的混凝土塑性损伤模型，塑性流动势函数采用 Drucker-Prager 双曲线函数。计算模型采用混凝土试件尺寸和网格剖分如图 6。取文献[21]的轴拉试验和轴压试验观测数据：弹性模量为 53.6 GPa，抗拉强度为 1.84 MPa，抗压强度为 25.28 MPa，泊松比为 0.2，密度为 2400 kg/m<sup>3</sup>。由文献[22-23]试验观测数据分析得到如图 7 和图 8 给出的混凝土材料的峰(失效)后应力、损伤变量与非线性(开裂)变形关系曲线。

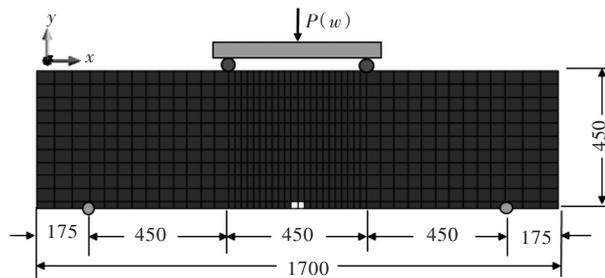


图 6 混凝土试件有限元数值模型及网格剖分(单位: mm)

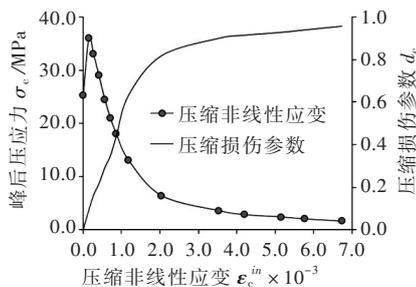


图 7 压缩非线性参数曲线

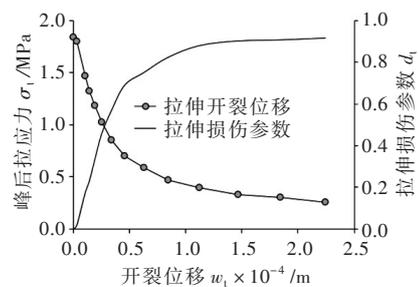


图 8 拉伸非线性参数曲线

为了保证在跨中区域发生断裂破坏，将梁跨中下边缘宽 45 mm×高 22.5 mm 的区域的弹性模量分别取 0.67 GPa 和 5.36 GPa，即为实测弹性模量的 1/80 和 1/10。对图 6 所示的混凝土弯拉试件，施加竖向位移荷载  $P(w)$ ，位移增量取为  $10^{-3}$  mm，进行弯拉破坏全曲线数值模拟。为了消除计算结果的网格敏感性，在有限元计算时，由图 8 给出的损伤变量和峰后应力与开裂位移关系，计算单元拉伸塑性应变  $\epsilon_t^{pl} = \frac{w}{h_e} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \frac{\sigma_t}{E_0}$ ，单元的特征长度  $h_e$  取单元面积的平方根。

图 9 给出了随竖向位移增加，梁的弯拉应力由弹性阶段到达峰值，然后进入软化阶段的过程。梁上边缘中点弯拉应力  $\sigma = PL/bh^2$  ( $P$  为荷载， $L$  为支间距， $b$  为梁厚度， $h$  为梁高度) 与梁上边缘中点竖向位移相对应。

表 1 列出了由同一批次混凝土浇筑两个混凝土试件<sup>[21]</sup>：编号为 F110509A22 和 F110517A03 弯拉峰值

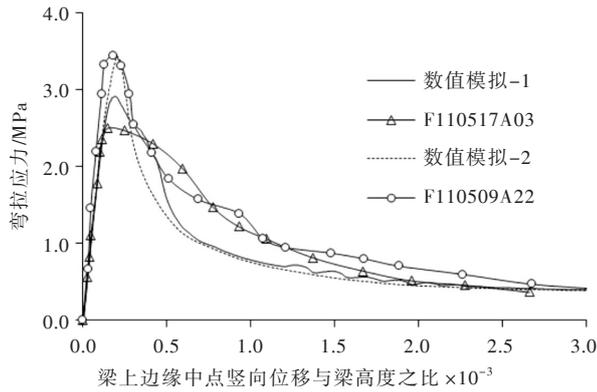


图9 混凝土试件弯拉应力与变形全曲线数值计算与试验结果

表1 混凝土静态弯曲破坏试验值与计算值

试件编号	破坏荷载/kN		抗弯强度/MPa	
	试验值	计算值	试验值	计算值
F110517A03	168.34	184.10	2.49	2.90
F110509A22	232.69	235.60	3.45	3.40

荷载及其对应的弯拉强度的试验值和数值计算结果，其中数值模拟-1计算得到弯拉应力峰值为2.90 MPa，与试件 F110517A03 试验值 2.49 MPa 比较接近；数值模拟-2 计算得应力峰值为 3.40 MPa，与试件 F110509A22 的试验值 3.45 MPa 接近。

由图9给出的混凝土试件弯拉应力与变形全曲线中的数值计算与试验结果对比可以看出，在软化曲线的中间段，数值模拟与试验观测曲线存在一定差异，但最后与实测试件的软化变形曲线趋于一致。另一方面，从梁跨中局部区域弹性模量不同取值所得两条计算全曲线分别与同一批次混凝土两试件的试验结果相吻合，这也说明实际试件在局部材料性能的不均匀可能是导致试验观测结果差异的诱因。

图10给出了试件弯拉损伤破坏数值模拟结果。图10(a)为加载至荷载峰值状态下的最大主应力分布，最大主拉应力接近抗拉极限强度 1.84 MPa，位于裂纹的扩展的前沿，说明最大应力控制在屈服面上；图10(b)给出的损伤云图是梁弯曲变形接近失稳时的损伤云图，由图10(b)看出，梁从跨中下边缘开始起裂，向上边缘扩展。由以上混凝土试件弯拉损伤破坏全过程的数值模拟分析可以看出，计算结果与材料试验观测结果吻合较好，从而验证了本文提出的弹塑性损伤问题的隐式迭代法的正确性。

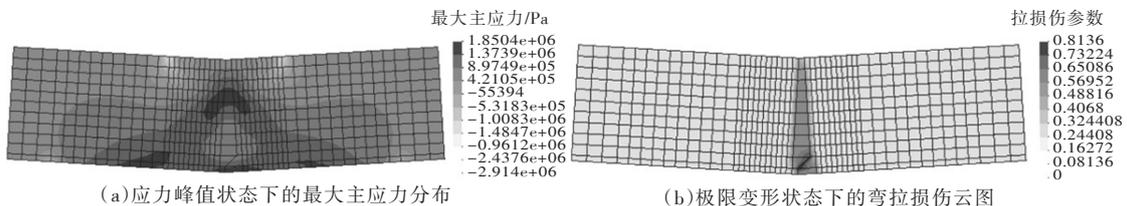


图10 混凝土试件弯拉损伤破坏数值模拟结果

## 5 结论

本文的全隐式迭代法将屈服函数和塑性流动方程作为基本方程，联立隐式求解由平衡方程、屈服条件和塑性流动方程组成的方程组，无需显式计算弹塑性矩阵。该算法在引入局部回映迭代法后，通过很少几次回映迭代就可以获得理想的收敛精度，并且具有很好的数值稳定性。

由于在有效应力空间里混凝土类材料的塑性损伤遵循塑性变形规律, 本文基于等效应变假设, 将混凝土类材料的弹塑性损伤问题分解为弹塑性和损伤问题。应用弹塑损伤问题全隐式迭代法在有效应力(虚拟)空间计算塑性变形, 再按应变等价的原则, 考虑材料的损伤程度, 即借助于损伤参数将有效应力转换为物理空间的实际应力。本文混凝土试件弯拉损伤数值计算表明, 在有效应力空间里, 随有效应力的增加, 塑性(残余变形)屈服面处于膨胀状态, 混凝土弹塑性损伤问题的全隐式迭代是稳定的。由于损伤参数为塑性应变的单调增函数, 因此损伤参数的增大只会影响实际应力的大小, 而不会影响塑性变形迭代求解的稳定性。

最后强调指出, 本文的隐式迭代格式是以全量的形式给出, 这样应用该方法分析高混凝土坝非线性地震响应时可以很方便地以全量形式实现地震动荷载输入。另外, 本文提出的弹塑性损伤问题全隐式迭代法不仅适应于混凝土坝体, 也适应于坝基岩体的弹塑性损伤问题的求解。

## 参 考 文 献:

- [ 1 ] ORTIZ M A . Constitutive theory for the inelastic behavior of concrete[J] . Mechanics of Materials, 1985, 4: 67-93 .
- [ 2 ] JASON L, HUERTA A, PIJAUDIER-CABOT G, et al . An elastic plastic damage formulation for concrete: application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model[J] . Comput Eethods Appl . Mech . Eng . , 2006, 195 (52): 7077-7092 .
- [ 3 ] ZHU Q, ZHOU C, SHAO J F, et al . A discrete thermodynamic approach for anisotropic plastic damage modeling of cohesive-frictional geomaterials [J] . Int . J . Numer . Anal . Methods Geomechanics, 2010, 34 (12) : 1250-1270 .
- [ 4 ] AI-RUB RKA, KIM S M . Computational applications of a coupled plasticity-damage constitutive model for simulating plain concrete fracture[J] . Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77: 1577-1603 .
- [ 5 ] AYHAN B , JEHEL P, BRANCHERIE D, et al . Coupled damage-plasticity model for cyclic loading: theoretical formulation and numerical implementation[J] . Eng . Struct . , 2013, 50: 30-42 .
- [ 6 ] DANESHYAR A, GHAEMIAN M . Coupling microplane-based damage and continuum plasticity models for analysis of damage-induced anisotropy in plain concrete[J] . International Journal of Plasticity, 2017, 95: 216-250 .
- [ 7 ] IRONS B M, TUCK R C . A version of the aitken accelerator for computer iteration[J] . International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969, 1: 275-277 .
- [ 8 ] CRISFIELD M A . Arc-length method including line searches and accelerations[J] . International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, 19: 1269-1289 .
- [ 9 ] SEIFERT T, SCHMIDT I . Line-search methods in general return mapping algorithms with application to porous plasticity[J] . International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 73: 1468-1495 .
- [ 10 ] WEMPNER G A . Discrete approximations related to nonlinear theory of solids[J] . International Journal of Solids and Structures, 1971, 7: 1581-1599 .
- [ 11 ] RISK E . The application of newton's method to the problem of elastic stability[J] . Journal of Applied Mechanics, 1972, 39: 1060-1066 .
- [ 12 ] 马怀发, 梁国平, 周永发 . 弹塑性隐式阻尼迭代法[J] . 工程力学, 2012, 29(10): 57-62 .
- [ 13 ] LEMAITRE J . A continuous damage mechanics model for ductile fracture[J] . Journal of Engineering Materials and Technology, 1985, 107(1): 83-89
- [ 14 ] SIMO J C, JU J W . Strain- and stress-based continuum damage models -I formulation[J] . J . Solids Structures, 1987, 23(7): 821-840 .
- [ 15 ] FARIA R, OLIVER J, CERVERA M . A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures[J] . International Journal of Solids Structure . 1998, 35(14): 1533-1558 .
- [ 16 ] SIMO J C, TAYLOR R L . A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity[J] . International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 22: 649-670 .
- [ 17 ] TED BELYTSCHKO, WING KAM LIU, BRIAN MORAN . Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures

- [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [18] LEE J, FENVES G L. A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1998, 27: 937-956.
- [19] LEE J, FENVES G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(8): 892-900.
- [20] LUBLINER J, OLIVER J, OLLER S, et al. A plastic-damage model for concrete[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, 25(3): 299-326.
- [21] 胡晓, 张艳红. 溪洛渡拱坝全级配混凝土动力特性试验与分析研究报告[R]. 北京: 中国水利水电科学研究院, 2014.
- [22] 张艳红, 胡晓, 杨陈, 等. 全级配混凝土动态轴拉试验[J]. *水利学报*, 2014, 45(6): 720-727.
- [23] 张艳红, 胡晓, 杨陈, 等. 全级配混凝土轴拉应力-变形全曲线试验研究[J]. *中国水利水电科学研究院学报*, 2017, 15(2): 96-100, 106.

## Full implicit iterative method for elastoplastic damage of concrete-like materials

ZHANG Li<sup>1</sup>, LI Guangkai<sup>1</sup>, MA Huaifa<sup>2, 3</sup>

(1. *Shandong Taishan Pumped Storage Power Station Co., Ltd., Taian 271000, China*)

2. *State Key Laboratory of Simulation and Regulation of Water Cycle in River Basin, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China*

3. *Earthquake Engineering Research Center, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China*)

**Abstract:** The full implicit iterative method for the elastoplastic problems can be used to solve the yield condition, plastic flow equation and equilibrium equations simultaneously. In order to improve the convergence of the algorithm, local return-mapping iteration of yield stress is introduced in this paper. Considering that an elastoplastic damage model can reflect both its plastic (unrecoverable) deformation and the damage weakening of the stiffness of concrete-like materials, the elastoplastic damage problem is decomposed into elastoplastic problem and damage problem of concrete materials. Therefore, the full implicit iterative method of the elastoplastic problem is used to calculate the plastic deformation in the effective stress space, and then, based on the principle of strain equivalence, and by means of damage parameters, the effective stress is converted into the actual (nominal) stress in the physical space. The method has been verified by the numerical simulation of flexural damage and failure process of concrete specimen. It is shown that when the plastic deformation in the effective stress space is strengthened, the magnitude of the damage parameter only affect the nominal stress, but not the stability of the numerical iteration of the plastic deformation. In addition, the full implicit iterative method proposed is not only suitable for solving the elastoplastic damage problem of concrete dam, but also for solving that of rock mass of dam foundation. Since the iterative scheme is fully implicit, it is convenient to input the full seismic load when applying this method to analyze the nonlinear responses of high concrete dams.

**Keywords:** concrete-like materials; nonlinear; elastoplastic damage; yield function; implicit iterative method

(责任编辑: 王冰伟)