

文章编号:0559-9350(2020)10-1267-11

混凝土骨料随机分布的分形研究及其对破坏特性的影响

任青文^{1,2}, 殷亚娟², 沈 雷¹

(1. 河海大学 力学与材料学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 混凝土的破坏特性和损伤破坏形态具有明显的离散性和随机性, 骨料的随机分布形态是重要的影响因素之一。但是对骨料分布的量化表征一直是比较棘手的问题。在假定混凝土是由骨料、砂浆及两者之间的界面组成的三相复合材料基础上, 建立了细观混凝土力学模型。对36组不同骨料分布形式下的混凝土试件的单轴拉伸力学行为进行了数值研究, 并利用盒维数和多重分形谱表征骨料分布, 研究其随机分布规律以及对混凝土破坏特性的影响。发现多重分形谱较盒维数可以更好地提取局部细节特征, 为骨料分布的量化研究提供了一种新的方法。进而统计分析了骨料分布多重分形谱谱宽与拉伸强度、软化段曲线(脆性)和裂纹分布盒维数的相关关系, 研究表明骨料分布多重分形谱谱宽与拉伸强度和脆性呈反相关关系, 与裂纹分布盒维数成正相关关系, 即骨料分布多重分形谱谱宽越小, 骨料分布越均匀, 峰值应力越大, 脆性越明显, 裂纹扩展越规则, 裂纹分布盒维数越小。该研究有助于加深对混凝土破坏特性和开裂破坏形态的认识。

关键词: 细观混凝土; 骨料分布; 多重分形维; 盒维数; 破坏特性

中图分类号: TV431

文献标识码: A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.20200089

1 研究背景

混凝土的应力-应变全曲线是其力学性能全面的宏观反应, 也是混凝土结构设计及数值仿真的基础^[1]。然而, 由于混凝土是一种由水泥砂浆、骨料及其他各类掺和料组成的多相复合材料, 即使是同一标号、同一级配的混凝土, 相同的养护条件和龄期, 最终得到的混凝土材料力学特性还是具有一定的离散性, 尤其是其非弹性阶段破坏特性的离散性更为明显, 其损伤破坏形态也呈现出很大的随机性。这不利于混凝土性能的研究和损伤破坏的控制。因此, 对混凝土强度及应力-应变曲线软化段离散性以及最终损伤破坏形态的随机性规律进行研究具有重要的科学和实用意义。

本质上, 混凝土的宏观力学性能与其细观结构密切关联, 混凝土的宏观破坏特性的离散性源于其内部组成的非均质性。因此, 混凝土中骨料的含量、形状、空间分布、初始缺陷等都是导致混凝土应力应变曲线离散、破坏形态随机的原因。研究表明, 同样配比的混凝土试件, 不同的骨料随机分布, 其线弹性力学特性相当一致, 但反映其破坏特性的峰值强度和下降段曲线不同, 裂纹形态各异^[1]。Unger等^[2]指出造成混凝土材料随机非均匀性的最重要因素是骨料的空间分布形式。李杰等^[3-4]构建了混凝土随机损伤力学理论体系, 给出了混凝土在单轴受压时的应力-应变全曲线的均值与均方差。Wang等^[5]通过数值模拟发现, 骨料不同的空间分布会对混凝土在外荷载作用下产生的初始微裂纹及后续宏观裂纹的位置(即裂纹扩散路径)产生一定的影响, 进而使得混凝土宏观强度和下降段软化曲线存在一定的差异。Kim等^[6]研究表明, 微裂纹的分布完全依赖于骨料分布。杜修力等^[1]发现不同骨料分布形式下的混凝土压缩强度和软化曲线均服从双参数Weibull分布, 且软化段上应力值的离散性比峰值点应力的离散性大。

收稿日期: 2020-02-19; 网络首发时间: 2020-09-30

网络首发地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20200930.0954.001.html>

基金项目: 国家自然科学基金项目(51739006); 中国博士后科学基金项目(2020T130170)

通讯作者: 任青文(1943-), 教授, 博士生导师, 主要从事复杂力学系统破坏与安全研究。E-mail: renqw@hhu.edu.cn

上述研究工作提高了人们对混凝土强度及软化段曲线随机性和离散性的认识,但局限于从统计学的角度对强度及软化曲线进行研究,缺乏对骨料分布形态的量化表征。实际上,骨料分布具有很大的随机性,难以简单地用概率分布进行表征。此外,混凝土结构在外荷载作用下损伤裂纹扩展形态不规则,且分布具有随机性,对其量化评价也一直是棘手问题。所以,骨料分布对混凝土破坏性能及其破坏形态的影响,需要引入新的方法进行深入研究。分形以及多重分形理论和方法^[7]是近年来兴起的专门研究不规则问题的有效方法,能够对不规则图形进行表征和量化^[8-12]。

本文采用数值模拟方法,对单轴拉伸混凝土试件进行研究,建立细观混凝土力学模型,模拟36组不同骨料分布形态下混凝土试件的单轴拉伸宏观力学性质及破坏形态,进而基于分形理论和方法,对骨料分布以及损伤破坏的裂纹分布形态进行量化,从而对骨料分布形态、混凝土峰值强度、脆性以及损伤破坏形态之间的关系进行研究,以期揭示骨料分布形态对混凝土破坏性能和损伤破坏形态的影响规律和机制。

2 分形理论与方法

2.1 盒维数 分形几何是由法国数学家 Mandelbrot 于 1970 年代提出并发展起的一门新的数学科学^[13]。它以自然界不规则以及杂乱无章现象为研究对象,其产生后很快被用于材料的微细观结构及其受力变形特性研究^[14-16]。分形维数是分形理论核心内容之一,是一种度量复杂形态的方法。在多种计算分形维数的方法中,盒维数法定义直观,计算简便,应用广泛,能够有效地计算图形的分形维,其计算公式如下:

$$D = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\lg N(L)}{\lg (1/L)} \quad (1)$$

式中: D 为所求骨料分布的盒维数; L 为正方形盒子的边长,以 $1/2^k$ 变化 ($k=0, 1, 2, \dots$); $N(L)$ 为用边长为 L 的盒子去覆盖整体骨料分布所需要的盒子数。

通过不断改变盒子尺寸来改变覆盖图形的盒子总数,得到一系列 $(L, N(L))$, 绘制 $\lg N(L) - \lg(1/L)$ 关系曲线。如果曲线满足线性关系,则证明图形具有自相似性,其斜率便是该分形图像的盒维数,可以利用分形几何理论来研究。

2.2 多重分形维 多重分形通过用一个谱函数来描述分形体不同层次的生长特征,从系统的局部出发研究其最终的整体特征^[17]。多重分形又称为多重分形测度,是定义在分形上的多个标度指数的奇异测度所组成的集合^[18]。盒维数法仅统计存在像素点的盒子个数,不能统计盒子中所包含的像素点个数。因此,盒维数法计算得到分形维数只能对整体的分形特征进行表述,而无法描述分形体的局部分形特征。多重分形考虑盒子内像素或其他物理量的差距,通过归一化分析获得一个概率分布集,再计算得到多重分形谱,从而揭示结构局部的细节信息,这一方法得到了广泛应用^[19-22]。

多重分形描述的是分形几何体在生长过程中不同的层次和特征。把研究的对象划分为 N 个小区域,设第 i 个小区域线度大小为 ε_i , P_i 为该小区域测度(例如概率或质量),且 $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ 。对不同的小区域 P_i 也不同,可用不同的标度指数 α_i 来表征,即^[17-18]:

$$P_i \propto \varepsilon_i^{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

其中, α_i 简称为 Hölder 指数,由于它控制着概率密度的奇异性,故也称奇异性指数。

若线度大小趋于零,则式(2)可变为:

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg P}{\lg \varepsilon} \quad (3)$$

从式(3)可以发现, α 是表征分形体某小区域的分维,称为局部分维,其值大小与所在的区域有关,反映了该区域概率的大小。若在研究对象上的测度是均匀的,则 Hölder 指数只有一个值。

得到 Hölder 指数 α 后,将在分形上具有相同 α 值的小盒子的数目记为 $N_\alpha(\varepsilon)$,它是与 ε 大小有

关的，并写成：

$$N_{\alpha}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-f(\alpha)}, \varepsilon \rightarrow 0 \tag{4}$$

由此可得出：

$$f(\alpha) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N_{\alpha}(\varepsilon)}{\lg \varepsilon} \tag{5}$$

与分形维数的定义相比发现， $f(\alpha)$ 的物理意义是具有相同 α 值的子集的分形维数，称为多重分形谱。一个复杂的分形体，它的内部可以分为一系列不同 $\alpha \sim f(\alpha)$ 值所表示的子集， $f(\alpha)$ 就给出了这一系列子集的分形特征。

3 数值模拟方法

本文采用细观力学方法，模拟 36 组不同骨料分布的混凝土试件，通过单轴拉伸的有限元模拟，得到混凝土试件的应力应变曲线和开裂破坏形态。

3.1 混凝土塑性损伤(CDP)模型 有限元分析中，混凝土采用 CDP 模型。该模型能够模拟水泥基材料的拉伸开裂和压缩碎裂现象^[23-24]，以及混凝土动力加载和循环加载力学行为。单轴应力状态下，CDP 模型应力应变曲线考虑了损伤引起的等效塑性应变(包含拉伸等效塑性应变 $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ 和压缩等效塑性应变 $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$)。依据试验，模型假定单轴加载时拉伸损伤因子 d_t 与压缩损伤因子 d_c 分别随拉伸等效塑性应变 $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ 和压缩等效塑性应变 $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$ 增加而增加^[25]。则由损伤因子控制的应力-应变关系可表示为：

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (1 - d_t) E_0 (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}) \\ \sigma_c &= (1 - d_c) E_0 (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}) \end{aligned} \tag{6}$$

式中：下标 t 和 c 分别表示拉伸和压缩； E_0 为初始弹性模量； σ 为应力。

图 1 为 CDP 模型单轴应力-应变关系曲线。多轴应力状态由单轴应力状态值拓展得到。关于该本构模型的详细描述，可参考 Lubliner 等^[26]和 Lee 等^[27]的相关文献。

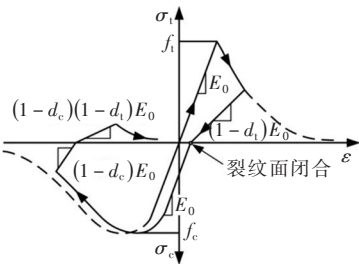


图 1 CDP 模型单轴应力-应变关系曲线

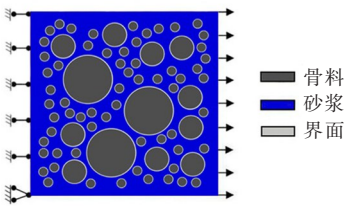


图 2 混凝土细观力学模型

3.2 混凝土细观模型及参数 采用基于 Monte Carlo 方法的二维随机骨料投放程序^[28]生成细观混凝土试件 36 组，试件统一边长为 150 mm×150 mm，骨料含量为 45%，粒径范围为 5 ~ 40 mm。含界面过渡区(ITZ)的二维混凝土三相复合材料数值模型如图 2。

Scrivener 等^[29]指出，ITZ 厚度约为 40 μm，但考虑到计算工作量，本文中 ITZ 厚度取 100 μm。在混凝土细观研究中，ITZ 的材料参数非常重要，但目前该参数较难由试验测得。通常认为 ITZ 的力学性能与水泥砂浆类似，略小于水泥砂浆^[6, 29-30]。

表 1 各组分的计算参数

材料类型	弹性模量 E/GPa	泊松比 λ	拉伸强度 f_t/MPa	裂纹极限宽度 w_c/mm
骨料	80	0.16		
砂浆	25	0.22	3	0.096
ITZ	20	0.2	2.4	0.096

本文计算参数见表1，水泥砂浆和ITZ力学本构模型均使用CDP模型。相比于砂浆基质及界面区，骨料具有较大的拉/压强度，对于静态和低速动态加载的情况，裂纹往往绕过强度较大的骨料颗粒^[31-32]而从界面及砂浆中穿过。因而可假定骨料为线弹性体^[6,30,33]。为了避免网格效应，拉伸应力-应变全曲线的下降段，将采用应力-位移曲线表示。

对混凝土细观数值模型进行位移加载，固定模型左端边界，在右端边界施加均布位移载荷，选择显式分析模块ABAQUS/Explicit进行分析求解，当拉伸应变达到600 $\mu\epsilon$ 时停止计算，共分为200个加载步。计算中以四节点平面应力四边形(CPS4R)单元剖分网格。单元的最长边和最短边比值不得大于50，所以当界面厚度(100 μm)确定后，其界面单元的最长边长不得超过5 mm，同时要求与界面相连的砂浆与骨料的网格单元边长均控制在此尺寸内，每组模型大约8000个单元。采用细观力学的均匀化方法获得36组混凝土试件单轴拉伸应力-应变全曲线。

3.3 基于细观混凝土模型的单轴拉伸数值试验 混凝土细观数值模型单轴拉伸计算结果如图3所示。

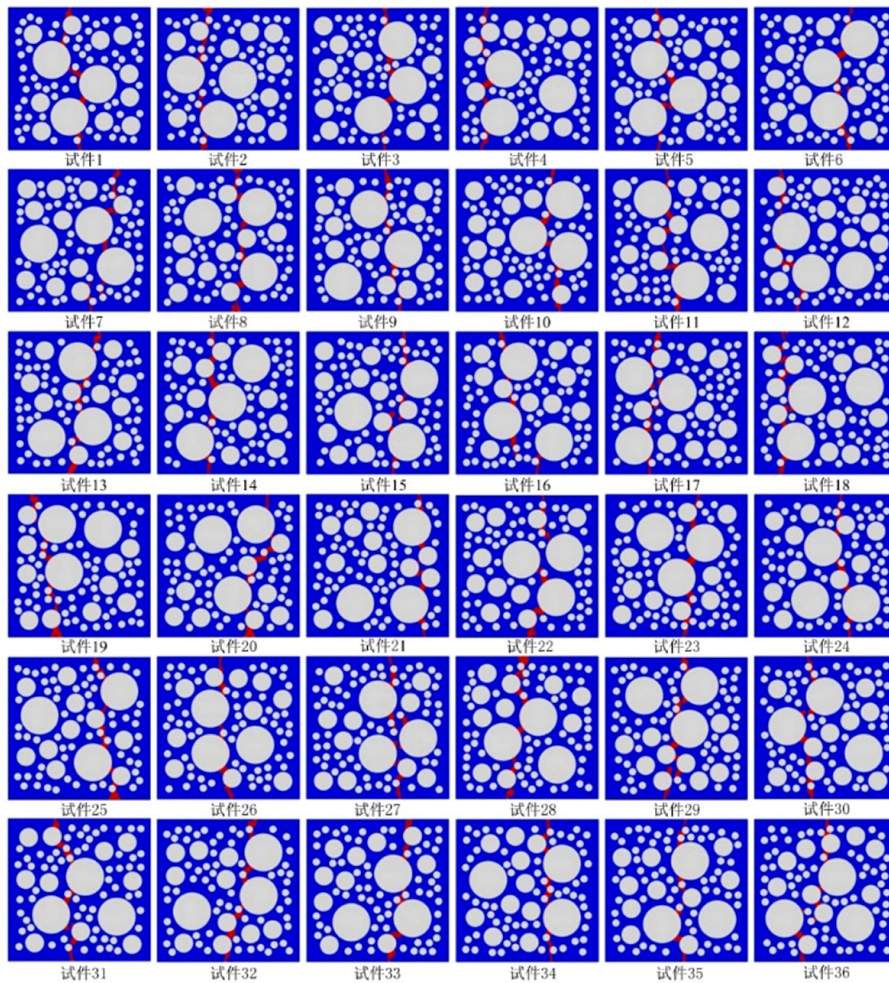


图3 36组混凝土数值模型计算结果

计算结果表明，混凝土单轴拉伸破坏时，微裂纹起始于骨料颗粒与砂浆基质之间力学性能相对薄弱的界面过渡区，并在扩展过程中绕过强度相对较高的骨料颗粒穿过砂浆，最终产生一条垂直于拉伸方向的主裂纹。随着骨料分布的不同，最终的裂纹分布也不同，但大体上，裂纹主要沿着大骨料界面扩展，随大骨料位置的变化而变化。因为裂纹扩展会以最小的耗能方式进行^[34]，而大骨料与砂浆之间的黏结面是最薄弱的地方，所以裂纹会沿大骨料周边扩展。

采用细观力学的均匀化方法获得36组混凝土试件单轴拉伸应力-应变全曲线，参见图4(a)。从图4(a)可以发现，对于不同的骨料分布，虽然应力-应变曲线大体相似，但仍有些许不同。在峰值点前，36组试件的线性段基本重合，一致性非常好，说明骨料分布形式对混凝土弹性阶段的宏观力学特性影响很小。而非线性段靠近峰值点处离散性较明显，峰值点有所差别。峰值点后，软化段曲线

接近平行，但具有较大的离散性，其离散程度大于峰值点的离散，说明骨料分布对混凝土的峰值强度和应力-应变曲线软化段的影响明显。

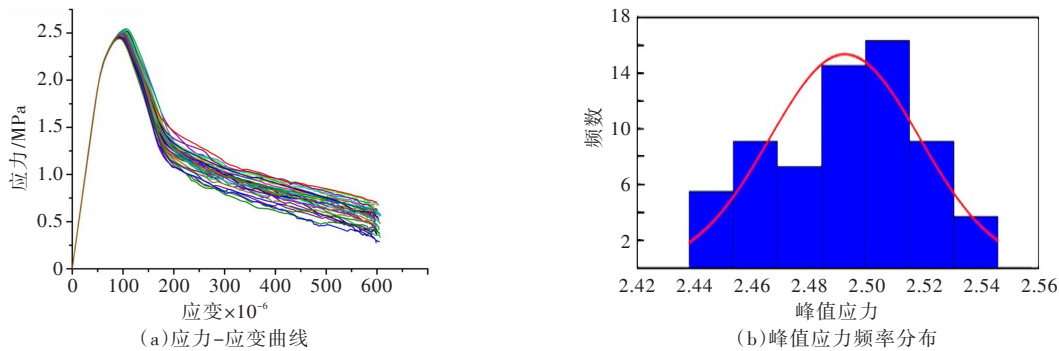


图4 36组应力-应变全曲线和峰值应力频率分布

36组骨料随机分布的混凝土试件相当于现实试验中一组(36个)标准试件的宏观力学性能的随机分布，因此，对36组试件峰值应力(拉伸强度)进行统计分析，将峰值应力划分8个区间，绘制其频率分布直方图见图4(b)。从图4(b)可以发现，数据分布形态大致服从Weibull分布，与文献[1]的研究一致。

4 骨料分布对混凝土力学行为的影响

4.1 骨料分布的分形表征

4.1.1 骨料分布的盒维数 利用盒维数法计算骨料分布的分形值。对每个样本的骨料图像进行黑白二值化处理，取边长为 L 的正方形小盒子覆盖骨料分布图，将无骨料颗粒占据的空的小盒子标记为0，有骨料颗粒占据的非空小盒子标记为1，统计所有为1的小盒子个数为 $N(L)$ ，然后通过不断改变盒子尺寸来改变覆盖图形的盒子总数，得到一系列 $(L, N(L))$ ，绘制 $\lg N(L) - \lg(1/L)$ 关系曲线，其斜率便是该分形图像的盒维数。依次计算并绘制每一组骨料分布的 $\lg N(L) - \lg(1/L)$ 关系曲线，最终得到36组混凝土试件的骨料分布的盒维数(图5)。从图5可以发现，36条拟合直线重合，斜率为1.86，拟合度(R^2)均达到0.99。由此可知，仅骨料分布不同的情况下，36组骨料分布的盒维数基本一致，分形值为1.86。这是因为36组混凝土试件在保持试件尺寸，骨料含量和骨料形状一致的情况下，骨料所占有的空间(这里是面积)有效性一致，在整体上，其骨料不规则分布一致，致使不同试件混凝土的线弹性力学特性一致。但是，一旦发生开裂破坏，开裂通道最容易沿着相对薄弱、可能存在初始微裂纹的骨料与砂浆界面形成(表1中界面的强度最小)。

从图3可知，由于不同试件内大小骨料分布形态的变化，骨料之间的开裂通道发生了变化。大骨料与大骨料相邻，则通道稀疏；而大骨料与小骨料相邻，则通道密集；使得裂纹扩展路径以及最后的裂纹分布形态的不同。可见，虽然骨料不规则分布整体上具有一致性，但是具体细节存在差异，因而

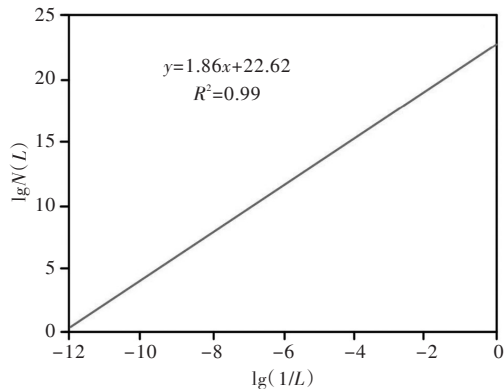


图5 36组骨料分布盒维数分形维

难以采用单分形的方法进行研究,需要引入多重分形维来进一步放大分形体的局部的细节分形特征。

4.1.2 骨料分布的多重分形谱 多重分形谱的计算首先应统计物理量在相应分形结构上的概率测度分布。本文用盒计数法进行概率测度的统计与计算。将处理后的骨料分布图像转换成数据文件,有像素点处用1表示,无像素点处用0表示。用盒维数法求概率分布,以尺寸为 $\varepsilon \times \varepsilon$ ($\varepsilon \leq 1$);设整个图形尺寸为 1×1 大小的正方形盒子覆盖在骨料图像上, ε 以 $1/2^k$ 变化($k=0, 1, 2, \dots$),包含骨料的盒子数量记为 $N(\varepsilon)$ 。求出对应于整幅骨料分布图的全体骨料像素点的数目总和 S ,对于每一个确定的图, S 是一个常数。在每个小正方形盒子 $\varepsilon \times \varepsilon$ 区域内,定义包含在此区域内的骨料像素点的数目总和为 $S_i(\varepsilon)$, $i=1, 2, \dots$,它依赖于划分尺寸 ε 以及 i ,从而得到每个小正方形区域所对应的概率测度 $P_i(\varepsilon)$:

$$P_i(\varepsilon) = \frac{S_i(\varepsilon)}{S} \quad (7)$$

式中: $S_i(\varepsilon)$ 为第 i 个盒子中所含骨料像素点的个数; S 为骨料分布图中全体骨料像素点总和。

其次,为了显示概率测度 $P_i(\varepsilon)$ 的作用,定义 q 阶矩下的配分函数 $\chi_q(\varepsilon)$ 为:

$$\chi_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon)^q, \quad q(-\infty, +\infty) \quad (8)$$

其中, q 为权重因子,不同的 q 表示不同大小的概率测度 $P_i(\varepsilon)$ 在配分函数 $\chi_q(\varepsilon)$ 中所具的比重。

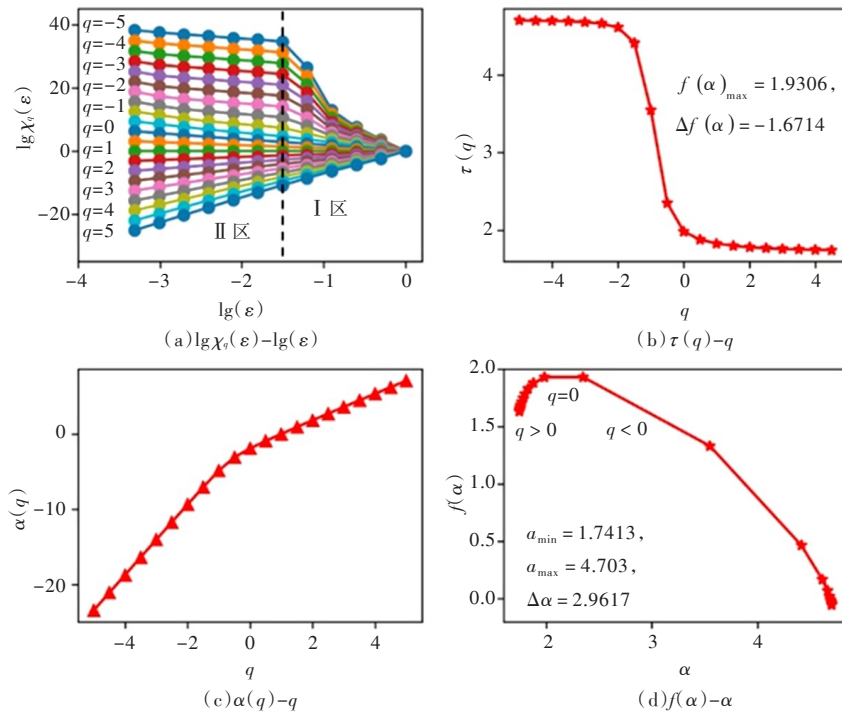


图6 试件1骨料分布的多重分形谱

以试件1骨料分布为例,给出了多重分形谱计算结果如图6所示。由图6(a)可知,在 $q \geq -1$ 时, $\lg \chi_q(\varepsilon) - \lg(\varepsilon)$ 基本上为直线,满足标度不变性,并且标度不变性的范围达到3个数量级,适合用多重分形谱理论进行分析; $q < -1$ 时,曲线分为两段, ε 大的区域(I区)斜率绝对值大, ε 小的区域(II区)斜率绝对值小。可见不是在所有 ε 范围内都满足标度不变性。这种异常现象的出现与小概率呈现异常的涨落有关^[35]。局部解决异常部分的一个办法是忽略一部分很小的 $P_i(\varepsilon)$,即认为它们是实际图形中的误差。本文借鉴文献[35],忽略掉的 $P_i(\varepsilon)$ 所包含的像素总数应小于原图形总像素的2%,从而保证修正后的图形不会失真。

然后讨论是否有幂律关系 $\chi_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} (P_i(\varepsilon))^q \propto \varepsilon^{\tau(q)}$ 成立,把满足幂律关系的尺度区间称为无标

度区间(即分形关系成立的尺度区间)。可以通过双对数关系图来确定质量指数函数 $\tau(q)$ ^[17]:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg \chi_q(\varepsilon)}{\lg \varepsilon} \quad (9)$$

如果 $\tau(q)$ 与 q 之间存在着非线性关系, 则说明对象具有多重分形性; 如果 $\tau(q)$ 是 q 的线性函数, 则说明对象是单分形。由图 6(b)可知, 质量指数函数 $\tau(q)$ 是一个上凸的函数, 即 $\tau(q)$ 与 q 之间存在着非线性关系, 表明骨料分布的确具有多重分形特征。

最后, 对 q 和 $\tau(q)$ 作勒让德变换可得:

$$\begin{cases} \alpha(q) = \frac{d(\tau(q))}{dq} \\ f(\alpha) = \alpha q - \tau(q) \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\alpha(q)$ 和 $f(\alpha)$ 为 q 阶矩下的谱参数。

由此即可得到骨料分布结构图的多重分形谱 $\alpha-f(\alpha)$ 。如果研究对象是单一分形, 则 $f(\alpha)$ 为一定值; 如果研究对象是多重分形的, 则 $f(\alpha)$ 一般呈现单峰图像。图 6(c)是 $\alpha(q)$ 随 q 值的变化曲线, 表明 $\alpha(q)$ 是 q 的递减函数, 且 $\alpha(q)$ 曲线的两端呈平缓变化趋势。理论上, q 的取值范围越大越好, 但实际计算时, q 不是越大越好, 当其值增大对计算结果已经没有显著影响时, q 的范围就可以截止。本文汲取前人的研究经验, 当 $\alpha(q)$ 的随着 q 值变化的改变率小于 0.2% 时^[22], 认为谱宽基本稳定, 进而确定 q 的取值范围。经过试算, 36 组试件的骨料分布的多重分形谱的 q 范围均介于 $[-5, 5]$ 。

图 6(d)给出了多重分形谱 $f(\alpha)-\alpha$ 关系图。由 6(d)可以发现, $f(\alpha)$ 是 α 的单峰凸函数, 在 $q>0$ 部分单调递增, 在 $q<0$ 部分单调递减, 当 $q=0$ 时, $f(\alpha(q=0))$ 取得最大值, 再次说明了骨料分布具有多重分形特征。

多重分形谱 $f(\alpha)-\alpha(q)$ 中, $f(\alpha)$ 的物理意义是对分形结构上的复杂程度的一种量度, 而不同的奇异性指数 α 则反映了不同概率测度子集的性质。多重分形谱的宽度 $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ 定量地表征了分形体内部最大概率子集和最小概率子集的对比关系, 即分形体内部的差异性程度及变化范围。多重分形谱越宽, 即 $\Delta\alpha$ 越大, 说明分形子集内部奇异性越强, 差异越显著, 各子集概率的两极化趋势越明显。当用于描述骨料分布时, 则表示骨料空间分布由均匀变为非均匀的趋势越明显。可见, 多重分形谱的宽度 $\Delta\alpha$ 可以定量表征分形体内部的差异性, 非均匀性和各子集分布的两极化特征。谱宽 $\Delta\alpha$ 敏感性较好, 常用于金融时间序列的多重分形谱分析^[36]。本文利用谱宽 $\Delta\alpha$ 表征骨料分布(图 7), 谱宽 $\Delta\alpha$ 越大, 骨料分布差异性越大, 即骨料分布越不规则; 谱宽 $\Delta\alpha$ 越小, 骨料分布差异性越小, 即骨料分布越均匀。从图 7 可见, 在 q 值范围一样的情况下, 36 个试件的谱宽 $\Delta\alpha$ 各不相同。其中, $\Delta\alpha$ 的最小值为 2.4227, $\Delta\alpha$ 的最大值为 3.1817。可以利用谱宽 $\Delta\alpha$ 来表征骨料分布, 凸显了多重分形放大细节的作用。

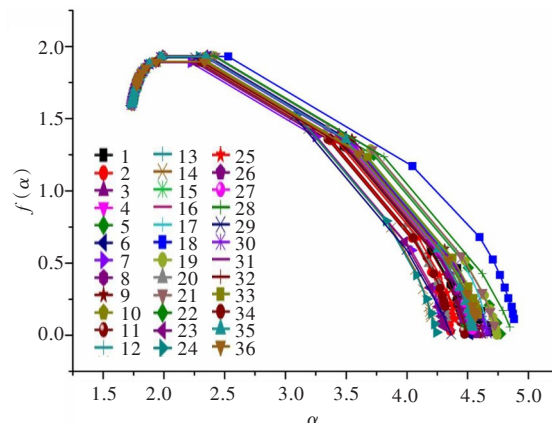


图 7 36 组骨料分布的多重分形谱

4.2 骨料分布对混凝土破坏特性的影响 混凝土的破坏特性主要表现在峰值强度、脆性和裂纹形态三个方面。

4.2.1 骨料分布对峰值强度的影响 利用上述方法计算得到了36组试件的多重分形谱,以及相应的谱宽 $\Delta\alpha$,然后对其与拉伸峰值应力的关系进行了统计分析(图8)。从图8可以发现,峰值应力随着骨料分布谱宽 $\Delta\alpha$ 的增大而减小,且相关系数达到0.93,属于高度相关(表2)。图8中绿色点是试件计算值,红色点是绿色点在 x 轴等间距区间上求得的 y 轴统计平均值,红色实线根据红色点线性拟合得到,图8说明,骨料分布越均匀,强度越高。根据Weibull提出的统计强度理论,材料强度由其最弱环的强度决定,最弱环一旦破坏,就会引发整个链条发生连锁反应式的破坏^[37]。

例如,对于受拉的混凝土试件,其任意截面 i - i 都有(厚度默认为1):

$$\sigma_{agg}^i A_{agg}^i + \sigma_{mor}^i A_{mor}^i + \sigma_{itz}^i A_{itz}^i = \bar{\sigma}^i A \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{11}$$

式中: σ_{agg}^i 、 σ_{mor}^i 、 σ_{itz}^i 分别对应截面 i - i 上骨料、砂浆、界面的应力分量; A_{agg}^i 、 A_{mor}^i 、 A_{itz}^i 分别对应截面 i - i 上骨料、砂浆、界面的受力面积; $\bar{\sigma}^i$ 为截面 i - i 的平均应力; A 为截面 i - i 的面积。

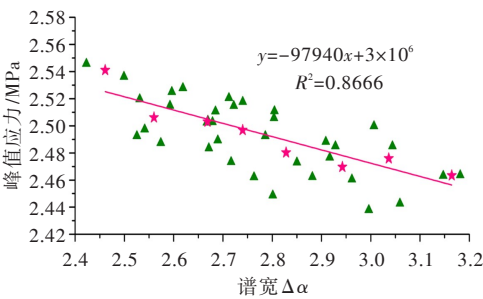


图8 谱宽 $\Delta\alpha$ 与峰值应力关系

试件的破坏取决于强度最弱的一环,欲使受力 $F = \bar{\sigma}A = \min(\bar{\sigma}^i A)$ 最大,则应提高最薄弱面的强度。当混凝土配比、骨料含量、大小、形状等都一定时,骨料分布则决定了各截面强度的强度。虽然骨料密集处的截面强度会明显提高,但该处密集的骨料必定导致他处骨料稀疏,从而降低了他处截面的强度。所以从拓扑优化的角度来说,只有当骨料随机均匀分布,使所有截面的强度分布差异最小时,材料的受力状态才能越均匀,试件的强度越高。

表2 骨料分布谱宽 $\Delta\alpha$ 与峰值应力 f_0 ,脆性 B_1 ,以及裂纹盒维数 D 的相关系数

	峰值应力 f_0	脆性 B_1	裂纹盒维数 D
骨料分布谱宽 $\Delta\alpha$	0.93	0.72	0.84

4.2.2 骨料分布对混凝土脆性的影响 混凝土的峰后应力-应变软化段曲线的形态一直是人们定性了解混凝土脆性程度的主要方法,如果峰后强度迅速降至某一很小的值说明混凝土脆性程度大,如果峰后强度降低很慢说明混凝土脆性程度小。为了研究应力-应变软化段曲线的离散性,本文提出建立在应力-应变曲线峰后应力下降幅度和绝对速率基础上的脆性指标 B_1 。如图9所示, A 为峰值点, B 为最终的残余强度。

$$k_{AB} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\varepsilon_B - \varepsilon_A} \tag{12}$$

$$B_1 = \frac{\lg |k_{AB}|}{10} \tag{13}$$

对 B_1 取 $\lg$ 值并除以10,将其转化为0~1变化范围的数值, B_1 值越大,说明混凝土脆性越大。由图10可知,混凝土试件的脆性随着谱 $\Delta\alpha$ 的增大而减小,相关系数达到0.72,属于显著相关(表2)。说明骨料分布越均匀,脆性越大。

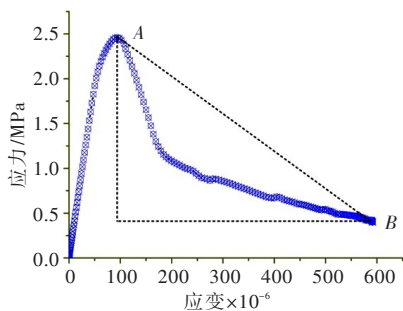


图9 脆性指标

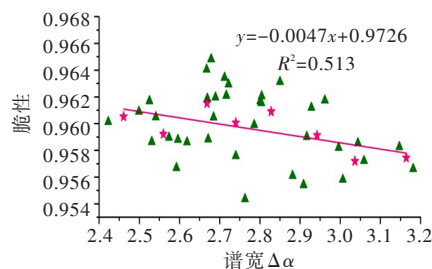


图10 谱宽 $\Delta\alpha$ 与脆性关系

4.2.3 骨料分布对裂纹形态的影响 从最后的计算结果图3中提取出最终破坏时的裂纹分布形态，图11显示了试件1骨料分布及相应的裂纹形态。

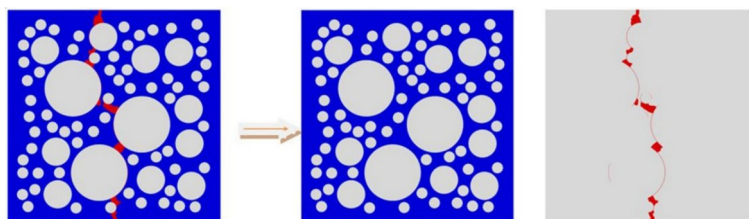


图11 “试件1”骨料分布和裂纹形态

利用盒维数法分析图11中裂纹的分形维，图12给出了试件1的裂纹分布的 $\lg N(L) - \lg(1/L)$ 关系曲线，发现曲线满足线性关系，拟合度 R^2 近似为1，表明图11中裂纹分布具有自相似性。因此，可以利用盒维数来表征和区分裂纹分布形态。

图3中36组混凝土试件由于骨料分布的不同，导致裂纹扩展路径及其最终的裂纹分布形态各不

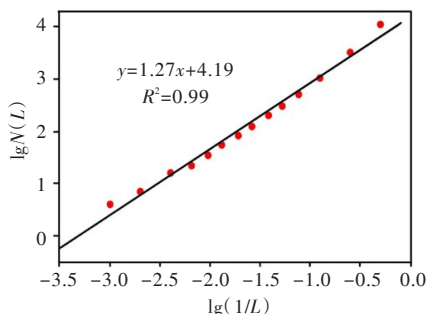


图12 “试件1”的裂纹分布的盒维数

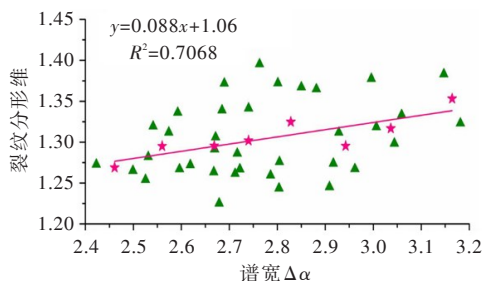


图13 谱宽 $\Delta\alpha$ 与裂纹盒维数关系

表3 36组混凝土试件的裂纹盒维数

试件序号	裂纹盒维数 D	试件序号	裂纹盒维数 D	试件序号	裂纹盒维数 D
试件1	1.2674	试件13	1.2915	试件25	1.2721
试件2	1.2672	试件14	1.2863	试件26	1.2635
试件3	1.3672	试件15	1.3120	试件27	1.3955
试件4	1.3719	试件16	1.2740	试件28	1.3231
试件5	1.3333	试件17	1.3832	试件29	1.3061
试件6	1.3722	试件18	1.3185	试件30	1.3119
试件7	1.2651	试件19	1.3362	试件31	1.3649
试件8	1.3391	试件20	1.2985	试件32	1.3415
试件9	1.2453	试件21	1.2670	试件33	1.2760
试件10	1.3776	试件22	1.2821	试件34	1.3194
试件11	1.2615	试件23	1.2542	试件35	1.2436
试件12	1.2728	试件24	1.2252	试件36	1.2594

相同,相应的盒维数也不同,36组混凝土试件的裂纹盒维数见表3。盒维数越大,说明裂纹扩展路径越曲折复杂,最终裂纹分布形态越不规则。

裂纹分布盒维数与骨料分布谱宽 $\Delta\alpha$ 的关系见图13,发现裂纹分布盒维数随着骨料分布谱宽 $\Delta\alpha$ 的增大而增大,相关系数达到0.84(表2),属于显著相关,说明骨料分布越均匀,裂纹分布越规则。

在谱宽 $\Delta\alpha$ 越大时,骨料分布越不规则,结构面骨料分布差异性大;而骨料稠密处,有大骨料(相当于一个高稠密区)和小骨料密集,使得局部破坏路径增加,试件整体性降低,破坏更易发展,峰值应力较小,峰值点前储存的能量相对较少;峰值点后释放能量阶段,较少的能量释放,较多的耗散途径(局部路径多),使得裂纹沿着更多的路径扩展,因而脆性相对越小,裂纹扩展径路曲折,从而最终的裂纹分布形态越不规则,裂纹盒维数越大。

5 结论

混凝土的破坏特性,包括峰值强度、软化段曲线以及裂纹分布形态具有随机性和离散性。本文采用细观力学方法,建立了36组具有不同骨料分布的混凝土随机骨料模型,通过有限元分析获得了36条单轴拉伸作用下的混凝土宏观应力-应变关系曲线和36组裂纹破坏开裂图。分别以多重分形谱谱宽和盒维数表征骨料分布和裂纹分布,统计分析了骨料分布与拉伸强度,软化段曲线和裂纹分布的相关关系,得出如下结论:(1)多重分形谱谱宽可以有效地表征骨料分布,而盒维数对裂纹分布可以进行很好的量化,且多重分形谱较盒维数可以更好地提取局部细节特征,为骨料和裂纹分布的量化研究提供了一种新的方法;(2)骨料分布多重分形谱谱宽与拉伸峰值强度和脆性呈反相关关系,与裂纹分布盒维数成正相关关系;(3)骨料分布多重分形谱谱宽越小,即骨料分布越均匀时,峰值应力越大,脆性越明显,裂纹扩展越规则,裂纹分布盒维数越小。

由此可见,骨料分布对混凝土破坏特性具有重要影响。本文的研究不仅揭示了骨料分布对混凝土破坏特性和破坏形态的影响规律,也为混凝土搅拌的均匀性要求和开裂控制提供了科学依据。

参 考 文 献:

- [1] 杜修力,韩亚强,金浏,等.骨料空间分布对混凝土压缩强度及软化曲线影响统计分析[J].水利学报,2015,46(6):631-639.
- [2] UNGER J F, ECKARDT S. Multiscale modeling of concrete[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2011, 18(3): 341-393.
- [3] 李杰,吴建营,陈建兵.混凝土随机损伤力学[M].北京:科学出版社,2014.
- [4] 李杰,卢朝辉,张其云.混凝土随机损伤本构关系——单轴受压分析[J].同济大学学报(自然科学版),2003,31(5):505-509.
- [5] WANG X F, YANG Z J, YATES J R, et al. Monte Carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores[J]. Construction and Building Materials, 2015, 75: 35-45.
- [6] KIM S M, AL-RUB R K A. Meso-scale computational modeling of the plastic-damage response of cementitious composites[J]. Cement & Concrete Research, 2011, 41(3): 339-358.
- [7] REN Q, LI Q, YIN Y. Concrete meso-structure characteristics and mechanical property research with numerical methods[J]. Construction & Building Materials, 2018, 158: 189-197.
- [8] 董蔷薇,袁达,宋斌,等.混凝土细观骨料模型随机性的分形验证[J].河海大学学报(自然科学版),2011,39(1):95-98.
- [9] 曹茂森,任青文,翟爱良,等.混凝土结构损伤的分形特征实验分析[J].岩土力学,2005,26(10):1570-1574.
- [10] 曹茂森,任青文.钢筋混凝土结构损伤检测的分形特征因子[J].土木工程学报,2005,38(12):59-64.
- [11] CAO M, REN Q, QIAO P. Macroecology of the host determines microecology of endobionts: protozoal faunas

- vary with wild ruminant feeding type and body mass[J]. *Journal of Zoology*, 2015, 283(3): 169–185.
- [12] 范颖芳, 周晶, 冯新. 受腐蚀钢筋混凝土构件破坏过程的分形行为[J]. *工程力学*, 2002, 19(10): 123–129.
- [13] MANDELBROT B B, AIZENMAN M. Fractals: form, chance, and dimension[J]. *Physics Today*, 1979, 32(5): 65–66.
- [14] INNAURATO N, OGGIERI C, ORESTE P P, et al. Experimental and numerical studies on rock breaking with TBM tools under high stress confinement[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2007, 40(5): 429–451.
- [15] JIANG Y, TANABASHI Y, LI B, et al. Influence of geometrical distribution of rock joints on deformational behavior of underground opening[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology incorporating Trenchless Technology Research*, 2006, 21(5): 485–491.
- [16] LIU H, KOU S, LINDQVIST P, et al. Numerical simulation of the rock fragmentation process induced by indenters[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2002, 39(4): 491–505.
- [17] 张济忠. 分形[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [18] 李彤. 多重分形原理及其若干应用[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
- [19] GAO Y, JIANG J, DE SCHUTTER G, et al. Fractal and multifractal analysis on pore structure in cement paste[J]. *Construction and Building Materials*, 2014, 69: 253–261.
- [20] EBRAHIMKHANLOU A, FARHIDZADEH A, SALAMONE S. Multifractal analysis of two-dimensional images for damage assessment of reinforced concrete structures[C]//*Smart Structures/ NDT 2015*. 2015.
- [21] 李楠, 李保林, 陈栋, 等. 冲击破坏过程微震波形多重分形及其时变响应特征[J]. *中国矿业大学学报*, 2017, 46(5): 1007–1013.
- [22] 孙霞, 傅竹西, 吴自勤. 薄膜生长的多重分形谱的计算[J]. *计算物理*, 2011, 18(3): 247–252.
- [23] 杜修力, 金浏. 基于随机多尺度力学模型的混凝土力学特性研究[J]. *工程力学*, 2011, 28(S1): 151–155.
- [24] SHEN L, REN Q, XIA N, et al. Mesoscopic numerical simulation of effective thermal conductivity of tensile cracked concrete[J]. *Construction and Building Materials*, 2015, 95: 467–475.
- [25] BAŽANT Z P. Size effect on structural strength: a review[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(9–10): 703–725.
- [26] LUBLINER J, OLIVER J, OLLER S, et al. A plastic-damage model for concrete[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1989, 25(3): 299–326.
- [27] LEE J H, FENVES G L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures[J]. *Journal of Engineering Mechanics-Asce*, 1998, 124(8): 892–900.
- [28] YAJUAN Y, QINGWEN R. Studying the representative volume of concrete using the entropy weight-grey correlation model[J]. *Magazine of Concrete Research*, 2018, 70(15): 757–769.
- [29] SCRIVENER K L, CRUMBIE A K, LAUGESEN P. The interfacial transition zone (ITZ) between cement paste and aggregate in concrete[J]. *Interface Science*, 2004, 12(4): 411–421.
- [30] XIAO J, LI W, CORR D J, et al. Effects of interfacial transition zones on the stress-strain behavior of modeled recycled aggregate concrete[J]. *Cement and Concrete Research*, 2013, 52: 82–99.
- [31] ŠAVIJA B, LUKOVIĆ M, PACHECO J, et al. Cracking of the concrete cover due to reinforcement corrosion: A two-dimensional lattice model study[J]. *Construction and Building Materials*, 2013, 44: 626–638.
- [32] ZHOU X Q, HAO H. Modelling of compressive behaviour of concrete-like materials at high strain rate[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(17): 4648–4661.
- [33] DU X, JIN L, MA G. Numerical simulation of dynamic tensile-failure of concrete at meso-scale[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2013, 66(4): 5–17.
- [34] 党发宁, 潘峰, 焦凯, 等. 不均匀脆性材料动强度提高机理及破坏形态研究[J]. *地震工程与工程振动*, 2015, 35(3): 111–118.
- [35] 王晓平, 吴自勤. 多重分形谱及其在材料研究中的应用[J]. *物理*, 1999, 28(6): 342.
- [36] 钟维年, 高清维, 陈燕玲. 基于小波和多重分形的金融时间序列聚类[J]. *系统工程*, 2009(3): 62–65.
- [37] 徐世烺, 赵国藩. 混凝土断裂韧度的概率模型研究[J]. *土木工程学报*, 1988, 21(4): 9–23.

(下转第 1288 页)

Elastoplastic two-surface model for overconsolidated unsaturated soils

LI Xiaoxuan, LI Tao, LI Jian

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In order to investigate the complex mechanical characteristics of overconsolidated unsaturated cohesive soils such as strain-hardening and shear dilatancy, an elastoplastic two-surface model for overconsolidated unsaturated soils under static and cyclic loading is established in the framework of elastoplastic theory by combining the Barcelona Basic Model (BBM) and a hardening rule describing the cyclic plasticity of materials. The proposed model contains a bounding surface and a loading surface, which evolve according to the loading and unloading conditions in the stress space. Radial mapping rule and principle of mobile memory center are adopted to reflect the cyclic plastic characteristics of overconsolidated unsaturated cohesive soils. The model takes into account the influence of suction and overconsolidated ratio (OCR). Moreover, the proposed model is able to be changed into the elastoplastic two-surface model for saturated cohesive soils and BBM while the suction of overconsolidated unsaturated cohesive soils is zero and the consolidation behaviour of unsaturated cohesive soils disappears respectively. The comparison between static experimental results and model simulations shows that the proposed model is capable of describing the static mechanical behaviour of overconsolidated unsaturated cohesive soils. In addition, some typical dynamic mechanical behaviour of overconsolidated unsaturated cohesive soils under cyclic loading is predicted.

Keywords: elastoplastic two-surface model; hardening criterion; unsaturated soils; matric suction; OCR

(责任编辑: 耿庆斋)

(上接第 1277 页)

Fractal study of random distribution of concrete aggregate and its effect on damage characteristics

REN Qingwen^{1, 2}, YIN Yajuan², SHEN Lei¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. College of Hydraulic Conservation and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The damage characteristics and patterns of concrete have obvious dispersion and randomness, and the random distribution form of aggregate is one of the important influencing factors. However, the quantitative characterization of aggregate distribution has always been a tricky issue. Assuming that concrete is a three-phase composite material composed of aggregate, mortar, and the interface between the two, the mechanical model of mesoscopic concrete is established in this paper. The uniaxial tensile mechanical behavior of 36 groups of concrete specimens with different aggregate distributions was numerically studied. The box dimension and multifractal spectrum are used to characterize the aggregate distribution, in order to study its random distribution law, as well as its influence on the failure characteristics of concrete. It is found that the multifractal spectrum can extract local detail features better than box dimension, which provides a new method for quantitative study of aggregate distribution. Furthermore, the correlations of the multifractal spectral width of aggregate distribution with tensile strength, softening section curve (brittleness) and the box dimension of crack distribution are analyzed. The results show that the multifractal spectral width of aggregate distribution is negatively correlated with tensile strength and brittleness, but positively correlated with the box dimension of crack distribution. This means that the smaller the multifractal spectrum width of the aggregate distribution, the more uniform the aggregate distribution, the larger the peak stress, the more obvious the brittleness, the more regular the crack growth, and the smaller the box dimension of the crack distribution. This research is helpful to deepen the understanding of concrete damage characteristics and cracking patterns.

Keywords: meso-concrete; aggregate distribution; multifractal spectrum; box dimension; damage characteristics

(责任编辑: 王冰伟)