

文章编号: 0559-9350(2023)05-0610-11

水中运行设备共振幅频特性研究

徐洪泉, 周 叶, 廖翠林, 曹登峰, 邹志超

(中国水利水电科学研究院, 北京 100038)

摘要: 在水力机械等淹没水中设备的运行中, 常遇到剧烈振动造成设备损坏等故障, 多认为由共振引起。本文首先对单自由度简谐振动系统自由振动、强迫振动方程的稳态振动解进行无量纲化处理, 计算出不同阻尼比条件下的共振频率比、共振幅值比, 发现阻尼比、共振频率比、共振幅值比三者之间存在一一对应的单调变化关系, 并据此提出了分别测量设备在水中及空气中的自由振动频率, 假定空气中自由振动频率为设备固有频率, 再依次确定水中阻尼比和共振幅值比的反求式估算方法。本研究采用敲击法进行了混流式水轮机模型转轮水中及空气中自由振动频率测试, 发现其水中自由振动频率比空气中低, 其水中一阶自由振动频率与空气中一阶自由振动频率之比约为 0.758~0.872; 如假定该值为水中自由振动频率比, 可计算出相应的水中阻尼比为 0.652~0.490, 共振幅值比约为 1.01~1.17。本研究还进行了中间固定两侧悬臂梁在空气及水中的真实共振试验, 在两侧悬臂梁计算固有频率附近均发生明显共振, 发现水中共振频率比空气中明显降低, 用反求法获得的水中共振幅值比小于 2, 水中共振幅值对空气中初始振动幅值放大倍数也非常小, 进一步说明水中共振时对激振幅值的放大作用非常有限。

关键词: 水轮机转轮; 悬臂梁; 共振; 自由振动; 固有频率; 阻尼; 振幅

中图分类号: TV734

文献标识码: A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.20220719

1 引言

振动在大自然、日常生活和工农业生产中很常见, 是指物体在平衡位置附近所做的往复运动^[1-4]。共振是振动的一种特殊状态, 是指一物理系统在特定频率下比其他频率以更大的振幅做振动的情形, 是激振频率与系统固有频率相等或相接近时系统振幅显著增大的现象。

在车辆、船舶、航空、动力机械、机加工设备及所有旋转机械运行时, 均面临振动问题, 并存在共振可能性, 避免共振带来危害一直是必须面对的重大课题。汽轮发电机组运行中常遇到油膜震荡问题, 轴承最大振幅可达 600~700 μm ^[5-6], 由自激振动引起, 是在负阻尼作用下产生的共振。在混流式水轮机运行中, 发生过 10 余起主轴临界转速频率大幅值弓状回旋故障, 严重者压力脉动幅度超过运行水头, 也属自激振动^[7-9]。在船舶航行中, 也可能受波浪等影响引起共振^[10]。

受大气环境下运行设备共振事故造成严重破坏后果的影响, 加之水中运行设备遇到许多类似于共振的严重故障, 许多还造成了结构材料断裂、事故停机等故障, 这引起相关行业密切关注, 开展了大量研究工作。其中有研究管道振动和共振的^[11-12], 更多的是研究水轮机卡门涡共振^[13-14]、涡带共振及所谓的“水体共振”^[15]、“空化共振”等^[16]。

也有不少学者对水轮机和船舶螺旋桨等水下运行设备的共振及固有频率问题进行了数值计算研究^[17-18], 文献[19]则采用经验下降系数分析及优化的方法计算了离心泵叶轮水中固有频率, 前 6 阶比空气中约下降 15%, 7~10 阶约下降 40%。部分研究者将流固耦合技术应用于水力阻尼数值预

收稿日期: 2022-09-09; 网络首发日期: 2023-05-19

网络首发地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20230518.1135.001.html>

基金项目: 中国水利水电科学研究院科研专项项目(HM0145B432016)

作者简介: 徐洪泉(1955-), 教授级高级工程师, 主要从事水力机械开发及稳定性研究。E-mail: xuhq@iwhr.com

测^[20]，对认识水中共振有一定促进。

部分研究者还进行了水中结构件固有频率和空气中固有频率的对比实验^[21-22]。文献[21]进行了自由梁、圆柱体结构固有频率的对比测量，自由梁多数阶次水中固有频率比空气中下降 16% 以上，圆柱体 1 阶固有频率水中比空气中下降 41%。文献[22]进行了悬臂梁完全暴露在空气中及部分淹没在水中固有频率的测试，当水深达到 160 mm 时(离完全淹没还差 20 mm)，XBL1 试件固有频率只有完全暴露在空气中的 52.7%，下降了 47.3%；XBL2 试件水中固有频率只有空气中固有频率的 70%，下降 30%。

但是，水中设备的共振研究一直难获突破，许多所谓的共振现象存在似是而非的嫌疑，往往会遇到强振频率和固有频率不对应等问题。为防止共振发生，就必须避免激振频率和设备固有频率相等或接近，估算或测试设备固有频率就成为设计之必须；不仅需提供空气中固有频率，还需提供水中的固有频率。在设备避振设计方面则更加复杂艰难，如激振频率比较低，需增加设备刚度，使设备固有频率远大于激振频率，增加了设备造价；如激振频率比较高(例如卡门涡，大朝山电站水轮机转轮叶片出水边卡门涡强振频率高达 280~392 Hz)，其一阶固有频率只有 41 Hz，低阶共振理论上不可避免；许多设备形状复杂，属多自由度系统，其固有频率阶次丰富，高达十阶以上，激振频率被各阶固有频率“包围”其中，避开低阶则避不开高阶，可以说是防不胜防。在无奈的情况下，对设备采取了全面或可称“盲目”的避振措施，大幅度增加了设备投资和运行成本。

本文采用理论和实践相结合的方式，从单自由度强迫简谐振动运动方程的稳态振动解出发，发现了共振幅值比和共振频率比、阻尼比之间的一一对应关系，发明了采用水中自由振动频率与空气中自由振动频率之比反求水体阻尼比及水中共振幅值比的创新方法。本文还进行了两个验证试验，其一是混流式水轮机模型转轮自由振动试验，采用敲击法进行了大气环境、水中自由振动频率测试对比试验，应用转轮的水中自由振动频率和空气中自由振动频率之比反求水中阻尼比及共振幅值与激振幅值之比。另一个验证试验是悬臂梁真实共振试验，通过调整变频电机转速改变激振频率，使两侧悬臂梁共振，分别测量各工况频率和振动幅值，总结发现了水中共振和空气中共振不同的频率及幅值特性。两个验证试验均证明，水中运行机械设备在共振状态下对激振幅值的放大倍数均小于 2，非常低。这是共振研究的重大突破。

2 阻尼对自由振动及共振的影响

阻尼对自由振动及共振的影响可从自由振动及强迫振动的运动方程及其解去认识。

2.1 阻尼对自由振动频率的影响 线性一自由度机械振动系统的自由振动运动方程^[1-2]为：

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + K \cdot x = 0 \quad (1)$$

式中： M 为质量，kg； R_m 为阻尼(单位振动速度所承受的阻力)，N·s/m； K 为刚度系数(单位振动位移所产生的弹性力)，N/m。

令 $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$ ， $2\beta = \frac{R_m}{M}$ ，简化后的运动方程为：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (2)$$

当 $\beta^2 < \omega_0^2$ 时，即阻尼不太大时，该线性微分方程的解为：

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega_f \cdot t + \varphi) \quad (3)$$

式中 ω_f 为自由振动的频率(圆频率)。

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4)$$

式中： ω_0 为振动系统固有频率(角频率或圆频率)； β 为阻尼系数(振动物体单位质量承受的阻尼)，Hz。也就是说，在有阻尼条件下，实际自由振动的频率 ω_f 并非振动系统的固有频率 ω_0 ，其小于 ω_0 ，且阻尼系数 β 越大， ω_f 越小。

很显然, 由于阻尼的存在, 实际自由振动的频率 ω_f 低于无阻尼条件下(真空状态)的固有频率, 文献[21-22]实际测量的水中自由振动频率低于空气中自由振动频率即说明了这一点。但需要说明的是, 大家约定俗成的称水中设备的自由振动频率为“水中固有频率”, 空气中设备的自由振动频率为“空气中固有频率”, 其实都不是真正的, 而是该阻尼系数下的实际自由振动频率。从严格意义上讲, 固有频率只有一个, 是 ω_0 , 而不是 ω_f 。 ω_0 是无阻尼共振或自由振动频率, 和阻尼系数无关; ω_f 是有阻尼条件下的自由振动频率, 和阻尼系数和固有频率均有关。

2.2 一自由度强迫振动方程的稳态无量纲解 如假定强迫振动为简谐振动, 其振动力为 $F \cdot \sin(\omega \cdot t)$, 线性一自由度强迫振动的运动方程为:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$, $2\beta = \frac{R_m}{M}$, $h = \frac{F}{M}$, 则上式变为:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = h \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6)$$

根据微分方程理论, 该线性方程的稳态振动解为:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) \quad (7)$$

其振动幅值 A 为:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}} \quad (8)$$

式中 φ 为强迫振动和振动系统之间的相位差, 即振动系统与强迫振动之间的滞后角。

为建立无量纲的振动幅值方程, 先对式(7)(8)的3种临界状态进行讨论, 以了解其物理意义:

(1) $\omega = 0$ 时激振幅值临界状态。如令激振频率 $\omega = 0$ 时的振动幅值为 A_0 , 则 $A_0 = h/\omega_0^2 = F/K$ 。由式(5)及刚度系数定义可知, K 为单位位移所需要的弹性力, 则强迫振动力 F 与 K 的比 A_0 即该力 F 作用下的原始振动幅值, 也就是在静力 F 作用下振动系统的静位移。

(2) $\beta = \omega_0$ 时阻尼系数临界状态。通常将 β 等于振动系统固有频率 ω_0 时的阻尼系数称为临界阻尼系数, 此时式(8)中分母变为 $\omega_0^2 + \omega^2$, 振幅 A 的最大值出现在 $\omega = 0$ 时, $A = A_0$, 其余任何频率下振幅值都小于激振幅值, 说明没有共振发生。这说明, 所谓的临界阻尼系数是指共振发生的门槛值。

(3) $\omega = \omega_0$ 时激振频率临界状态——速度共振状态。在该振动频率, 振动速度达到最大值。在有阻尼的条件下, 位移振动最大值并没有出现在该点。当阻尼比较小时, 位移振动最大值靠近该频率。

因此, 可分别用振动幅值 A 、阻尼系数 β 、振动频率 ω 和各自的临界值之比进行无量纲化, 并令振动幅值比 $a = A/A_0$, 阻尼比 $\xi = \beta/\omega_0$, 振动频率比 $w = \omega/\omega_0$, 则式(8)变为:

$$a = \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)^2 + 4\xi^2 \cdot w^2}} \quad (9)$$

根据式(9)绘制的不同阻尼比 ξ 条件下系统振动幅值比 a 随频率比 w 变化的曲线如图1所示。

很显然, 阻尼比 ξ 对振动幅值比 a 影响很大, 在所有的频率比 w 范围内, 阻尼比 ξ 大者其振动幅值比 a 都小。也就是说, 阻尼越小, 振动幅值越大, 所有阻尼比 ξ 的振动幅值比 a 均被 $\xi = 0$ 的振动曲线包络在下面。

2.3 阻尼对共振幅值及共振频率的影响 在图1中, 各阻尼比振动曲线的峰值点即位移振动共振

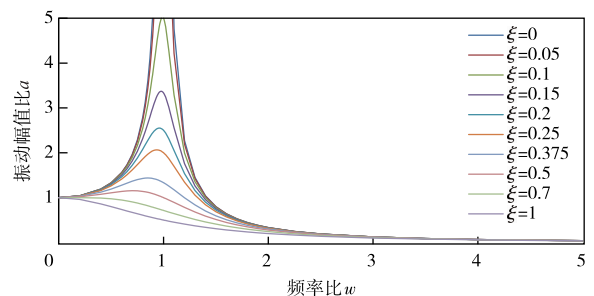


图1 强迫振动响应曲线

点, 该点幅值比即共振幅值与激振幅值的比, 而该峰值对应的频率比是共振频率与系统固有频率的比。由图 1 可发现如下规律:

(1) 阻尼比 ξ 越小, 共振幅值比 $a_r = A/A_0$ 越大, 也就是共振对激振幅值的放大倍数越大;

(2) 除阻尼系数 $\xi=0$ 之外, 所有阻尼比下共振频率 ω_r 均小于系统固有频率 ω_0 , 即共振频率比 $w_r = \omega_r/\omega_0 < 1$; 阻尼比 ξ 越大, 共振频率比 w_r 越低。

这就是说, 阻尼不仅影响共振幅值, 还影响实际共振发生的频率。在阻尼较大时, 不仅共振幅值较低, 共振频率也会比系统固有频率低。阻尼越大, 共振频率比 w_r 越小。

2.4 共振点阻尼比、幅值比及频率比关系 由图 1 可知, 无论阻尼比大小, 在共振点两侧, 每个振动幅值比 a 都对应两个频率比 w , 也就是可在两个频率下达到某个相同的振动幅值。但唯有共振点不同, 该点幅值比 a_r 和频率比 w_r 是唯一的 (见图 2)。

为获得各阻尼比条件下的共振峰值, 可对式 (9) 求其相对于 w 的一阶导数, 并令 $da/dw=0$, 由此可得, 共振点的频率比为:

$$w_r = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (10)$$

共振点的振动幅值比为:

$$a_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (11)$$

因此, 可以在 0 到 1 的范围内给定阻尼比 ξ , 应用式 (10) 和式 (11) 求得每个阻尼比对应的共振频率比 w_r 及共振幅值比 a_r , 绘制出 w_r 随 ξ 变化曲线 (见图 3) 及 a_r 随 ξ 变化曲线 (见图 4)。

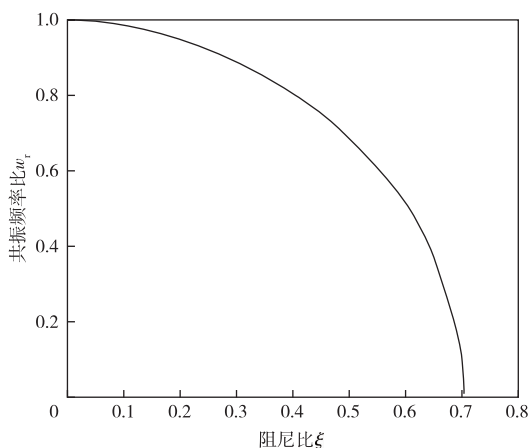


图 3 共振频率比随阻尼比变化曲线

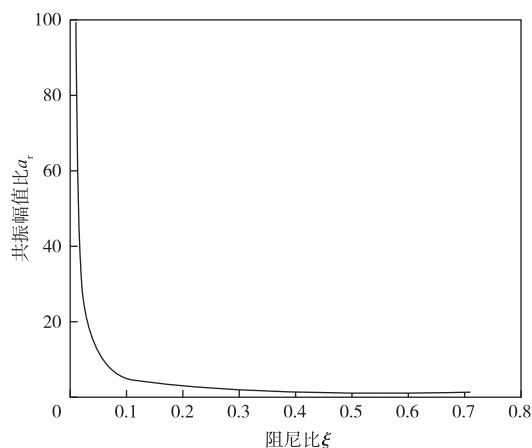


图 4 共振幅值比随阻尼比变化曲线

不难发现, 在阻尼比 ξ 从 0 到 1 的变化范围内, 图 3、图 4 曲线均为单调变化曲线, 即阻尼比 ξ 和实际共振频率比 w_r 及实际共振幅值比 (或称 “放大倍数”) a_r 之间均存在单调下降的一一对应关系。

类似的, 也可对计算自由振动频率的式 (4) 进行无量纲化处理, 公式两侧均除以固有频率 ω_0 , 并定义自由振动频率比 $w_f = \omega_f/\omega_0$, 则无量纲化后的式 (4) 变化为:

$$w_f = \sqrt{1-\xi^2} \quad (12)$$

比较式 (12) 和式 (10) 可发现, 共振发生频率不仅不等于振动系统固有频率, 且和该系统的自由振动频率也不同, 共振发生频率低于自由振动频率。由式 (12) 可得:

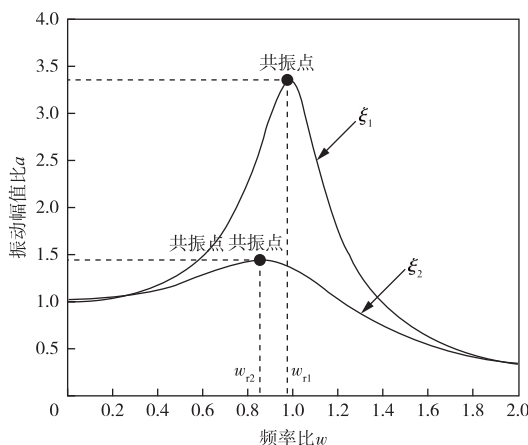


图 2 确定各阻尼比下共振频率比及幅值比

$$\xi = \sqrt{1 - w_f^2} \quad (13)$$

籍此, 本文发现了一条获得实际共振频率及幅值的全新思路: 从自由振动频率比 w_f 及共振频率比 w_r 入手, 根据式(13)及式(10)反求其对应的阻尼比 ξ , 再根据该阻尼比 ξ 应用式(11)求得共振幅值比 a_r 及共振幅值 A_r 。

2.5 水中运行设备共振幅值确定方法 到目前为止, 业界对介质阻尼的认识还不够充分, 更难言测量, 阻尼比 ξ 暂无法测量获得, 无法直接应用式(11)计算获得共振幅值比 a_r 。设备在真空中固有频率 ω_0 也很难测量, 即使已知其水中自由振动频率 $\omega_{f,w}$, 也无法确定其水中自由振动频率比 $w_{f,w}$, 故难以应用式(13)反求 ξ 并计算共振幅值比 a_r 。

为解决该难题, 本文提出一创新思路: 假设在空气中所测设备自由振动频率 $\omega_{f,a}$ 为该设备固有频率 ω_0 , 可通过测量设备在水中及空气中自由振动频率的方法估算水中共振频率及其幅值。具体方法和步骤如下:

(1) 分别测量设备在空气中、水中的自由振动频率 $\omega_{f,a}$ 及 $\omega_{f,w}$, 假定设备在空气中自由振动频率 $\omega_{f,a}$ 为其固有频率 ω_0 , 计算水中自由振动频率比 $w_{f,w} = \omega_{f,w} / \omega_{f,a}$ 。

(2) 将 $w_{f,w}$ 代入式(13)反求水中阻尼比 ξ 。

(3) 将 ξ 分别代入式(10)、式(11)计算水中共振频率比 w_r 及水中共振幅值比 a_r 。

由于共振频率比 w_r 、共振幅值比 a_r 及自由振动频率比 w_f 均为阻尼比 ξ 的函数, 前述方法却是在已知因变量 w_f 基础上反求自变量 ξ , 因此将该估算方法简称为“反求法”。

该反求法是基于假设 $\omega_{f,a} = \omega_0$ 的基础上进行的, 其可行性可从如下两个方面论证:

(1) 空气的阻尼比 ξ 非常小, 自由振动频率比 $w_{f,a} = \omega_{f,a} / \omega_0$ 接近于 1, 与现实比较接近, 该假设给反求法带来附加误差非常小。

(2) 本研究的目标是求解水中共振幅值比 a_r 的最大值, 该假设会造成计算的 a_r 比理想值大, 与目标要求一致, 还能起到安全裕量作用, 说明该假设及基于此的反求法是可行的。

2.6 反求法适用性讨论 该方法基于线性一自由度简谐振动方程, 除适用于线性一自由度简谐振动外, 其余振动的适用性应具体问题具体分析:

(1) 多自由度线性简谐振动, 可以应用。因为任何多自由度系统都是由单自由度系统组合构成的, 均可应用该方法通过测量各阶自由振动频率获得其对应的共振幅值比。

(2) 非线性阻尼振动系统, 可以参考应用。尽管假定 R_m 为线性阻尼, 但黏性阻尼类线性阻尼并非主要成分, 随振动速度或位移变化的非线性阻尼是主要成分。非线性阻尼会造成振动阻力随振动幅值增加而增加, 使共振幅值比进一步降低, 会更安全。

3 水轮机模型转轮自由振动频率测试及水中共振幅值估算

水轮机模型转轮水中及空气中自由振动频率测试于 2020 年 1 月 15 日在中国水利水电科学研究院水力机械实验室进行。

3.1 测试设备及方法 被测试设备为混流式水轮机模型转轮, 转轮进水边直径 $D_1 = 360.9$ mm, 转轮叶片及上冠、下环材料均为不锈钢。

试验采用敲击法进行。转轮共 14 个叶片, 选择 1[#] 和 8[#] 两个对称布置叶片进行测试。每个叶片布置 3 个测点, 测点由外向内依次标号为 1 (离下环 $L/4$, L 为叶片出水边长度)、2 (离下环 $L/2$)、3 (离下环 $2L/3$)。3 个测点布置的均为防水型压电加速度传感器, 采样频率为 5000 Hz。

水中自由振动频率测试在长 2 m、宽 1.5 m 的矩形水池进行, 转轮淹没水深 100 mm。

3.2 试验结果

(1) 空气中自由振动频率测试结果。图 5 和图 6 为 1[#] 叶片空气中在 1 号敲击位置第一次敲击和第二次敲击的自由振动频率分析结果。图中横坐标为频率, 纵坐标为频响相对值, 是各测点频响幅值与各自频响最大幅值之比。

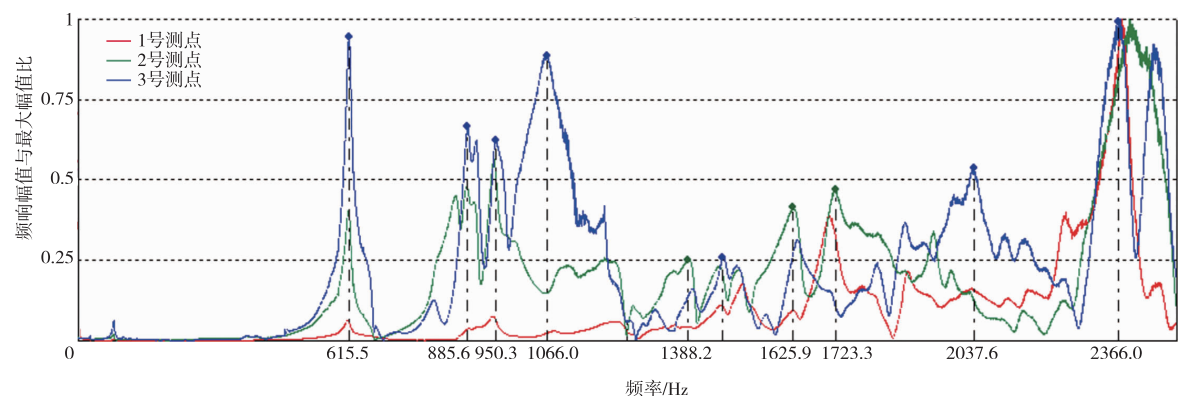


图 5 1#叶片 1 号位置空气中第一次敲击测试结果

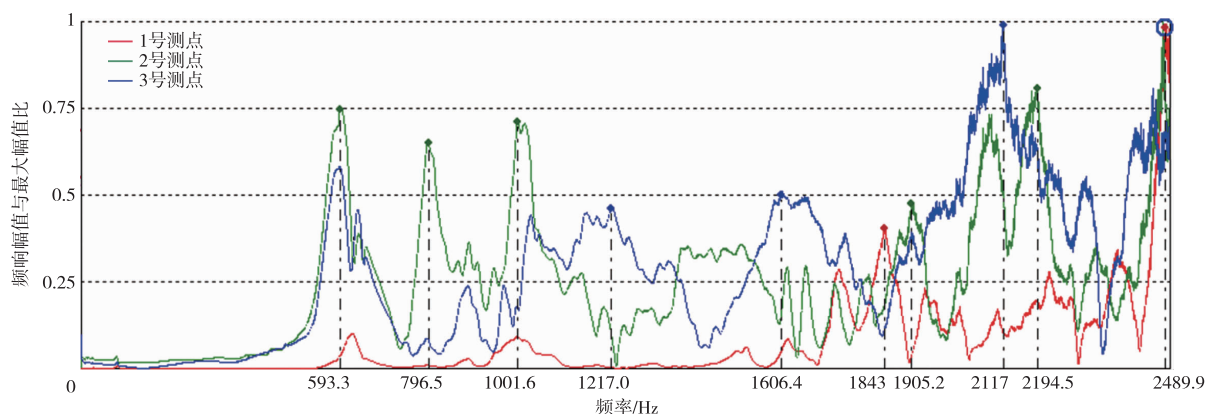


图 6 1#叶片 1 号位置空气中第二次敲击测试结果

比较图 5 和图 6 同一敲击位置两次敲击结果，可见其总体响应规律一致，各阶之间有一定差别（见表 1）。说明敲击位置不一定完全重复，该不重复对频率响应有一定影响，且阶次越高重复性越差。由于本研究主要目的是研究在空气及水中的自由振动频率变化，需要重复性和稳定性，以下的对照主要针对重复性比较好的 1 阶自由振动频率进行。

表 1 1#叶片 1 号和 2 号测点之间空气中两次敲击前 5 阶自由振动频率测试结果对照表

敲击次序	1 阶频率	2 阶频率	3 阶频率	4 阶频率	5 阶频率
第一次敲击/Hz	615.5	885.6	950.3	1066.0	1388.2
第二次敲击/Hz	593.3	796.5	1001.6	1217.0	1606.4
二者之比	1.037	1.112	0.949	0.876	0.864

空气中两叶片在两个不同位置敲击测量的一阶自由振动频率 f_{a1} 如表 2 所示。很显然，8#叶片无论是两次敲击还是两个测点之间都有良好的重复性，1#叶片则稍差，其 2 号位置的测量不仅两次敲击重复性误差大，两次敲击平均值和其它 3 个平均值也相差较大。因此，初步分析认为 1#叶片的 2 号位置敲击测量可能受到部分不确定因素影响，在其后的分析中不作为主导因素考虑。

表 2 两叶片空气中两次敲击一阶自由振动频率 f_{a1} 测量结果

	1#叶片		8#叶片	
	1 号位置	2 号位置	1 号位置	2 号位置
第一次敲击/Hz	615.5	557.3	604.2	603.9
第二次敲击/Hz	593.5	490.7	603.3	599.4
平均值 f_{a1} /Hz	604.5	524.0	603.8	601.7
重复性误差/%	1.8	6.4	0.1	0.4

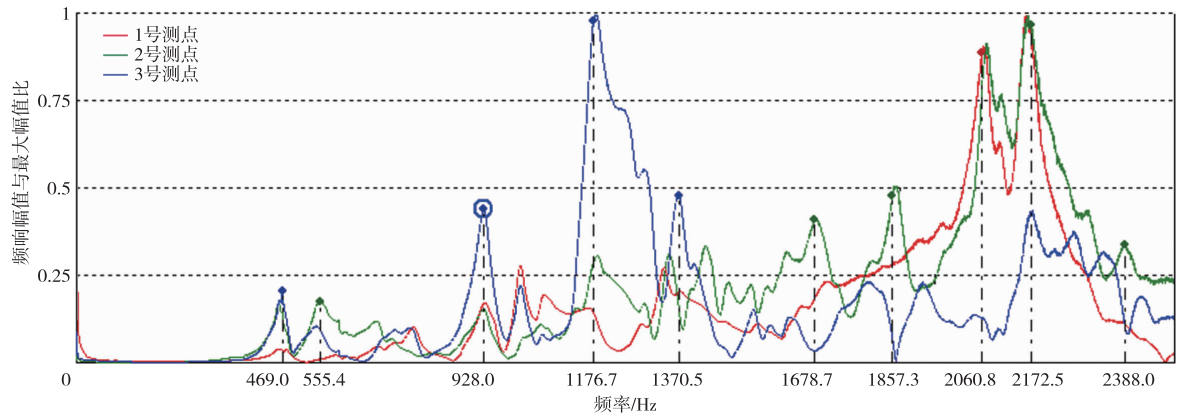


图7 1[#]叶片1号位置水中第一次敲击测试结果

(2) 水中自由振动频率测试结果。1[#]号叶片1号位置水中第一次敲击测量结果如图7所示，两个叶片水中测试分析的一阶自由振动频率 f_{w1} 及与 f_{a1} 的比如表3所示。

由表3可知，水中测量的转轮一阶自由振动频率 f_{w1} 与空气中测量的一阶自由振动频率 f_{a1} 之比 f_{w1}/f_{a1} 在0.758~0.872之间，4个比值的平均值为0.792。

表3 两叶片水中两次敲击一阶自由振动频率 f_{w1} 测量结果

	1 [#] 叶片		8 [#] 叶片	
	1号位置	2号位置	1号位置	2号位置
第一次敲击/Hz	469.0	457.8	459.9	456.8
第二次敲击/Hz	469.1	456.5	458.5	455.6
平均值 f_{w1} /Hz	469.1	457.2	459.2	456.2
f_{w1}/f_{a1}	0.776	0.872	0.761	0.758

3.3 水轮机模型转轮水中共振幅值比估算 应用“反求法”对水轮机模型转轮水中共振幅值比 a_r 进行估算。

(1) 假定空气中自由振动频率为设备固有频率，并将所测模型水轮机转轮水中和空气中自由振动频率之比 f_{w1}/f_{a1} 作为水中自由振动频率比 w_f ，即： $w_f=0.758、0.792、0.872$ ；

(2) 将 w_f 代入式(13)反求对应之阻尼比， $\xi=0.652、0.611、0.490$ ；

(3) 将3个 ξ 分别代入式(10)和式(11)，求得对应之 $w_r、a_r$ ，详见表4。

这说明，该水轮机转轮在水中共振的振动幅值只是其激振幅值的1.17倍，其共振放大作用非常有限。两个频率相近、幅值也接近的振动合成的拍振可产生幅值接近单一振动幅值2倍的振动^[23]，说明水中共振的危害性还不如拍振。

除此之外，本文还应用上述方法对文献[21-22]提供的自由梁、圆柱体结构、悬臂梁固有频率测试结果进行了计算分析，即使以圆柱体结构2阶为例，其水中自由振动频率比 $w_f=48.21/54.02=0.892$ ，对应的水中阻尼比 $\xi=0.452$ ，相应的水中共振幅值比 $a_r=1.24$ 。

表4 测量的3个自由振动频率比对应的阻尼比、共振幅值比

自由振动频率比 w_f	0.758	0.792	0.872
对应阻尼比 ξ	0.652	0.611	0.490
共振频率比 w_r	0.387	0.503	0.722
对应共振幅值比 a_r	1.011	1.034	1.171

4 悬臂梁空气及水中共振试验

为进一步验证前文提出的理论及试验成果，全面了解设备在空气及水中共振的幅频特性，进行了悬臂梁空气及水中真实共振试验。

4.1 试验方法及仪器 试验装置如图 8 所示，对一个中间固定、两侧悬臂的悬臂梁施加一周期可调节的强迫振动。这是用一根弹簧钢板制作完成的悬臂梁，其宽度 $b = 44\text{ mm}$ ，厚度 $h = 1.5\text{ mm}$ ，右侧长度 $L_1 = 188\text{ mm}$ ，左侧长度 $L_2 = 253\text{ mm}$ 。强迫振动在右侧悬臂梁施加，振动传感器布置在左侧，从右至左依次为振动位移传感器、电涡流位移传感器和加速度传感器，3 种传感器均为防水型。共振试验分别在空气和水中进行，测试分析其振动幅值及各阶频率。

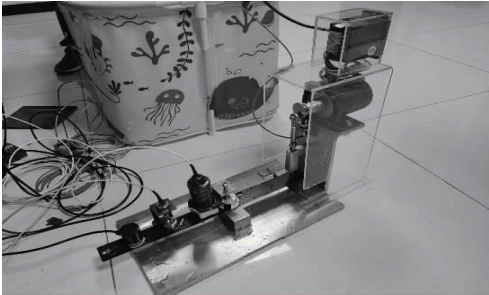


图 8 共振试验装置照片

强迫振动通过图 8 右侧细杆的上下运动施加给悬臂梁，卧轴电动机通过拐臂传动机构将拐臂的旋转转换为细杆的上下运动。该电动机为变频电机，其转速可在 $0 \sim 1400\text{ r/min}$ 之间调节。

传感器采集频率为 1000 Hz ，采集时间为 20 s ，计算分析出各传感器测量的振动峰峰值。电涡流位移传感器输出位移，单位 μm ；振动位移传感器测量结果是振动速度，积分后输出的也是位移，单位 μm 。

悬臂梁材料为弹簧钢，其弹性模量 $E = 1.965 \times 10^{11} \sim 1.986 \times 10^{11}\text{ Pa}$ 。按此估算，左侧悬臂梁的固有频率 $f_{01} = 9.34\text{ Hz}$ ，右侧悬臂梁的固有频率 $f_{02} = 16.91\text{ Hz}$ 。

4.2 试验结果及分析 试验分别在空气及水中进行，逐渐改变变频电机转速，以改变悬臂梁激振频率（即强迫振动频率）。振动位移传感器和电涡流位移传感器在空气及水中的振动测试结果分别如图 9 和图 10 所示。

4.2.1 共振工况频率特性

(1) 空气中共振频率特性。在图 9 和图 10 中，都有多个振动幅值陡升陡降的尖峰点，这就是通常所说的共振工况，尖峰越尖锐、越突出，说明共振越严重。

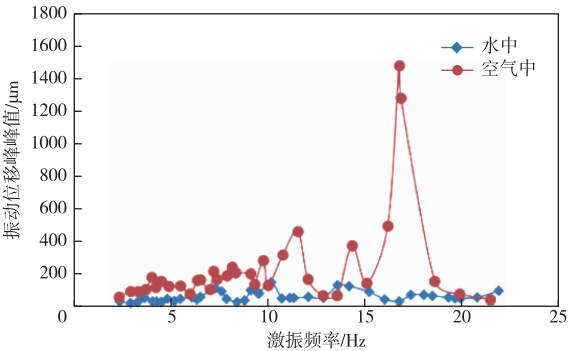


图 9 振动位移传感器位移测试结果

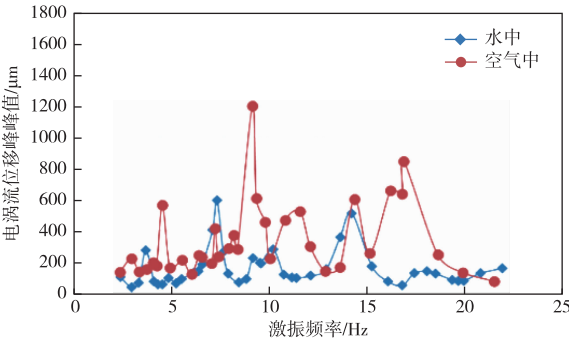


图 10 电涡流位移传感器测试结果

重点关注共振或尖峰频率。振动位移传感器尖峰频率成分比较简单，有 4 个峰值点，见表 5。电涡流位移传感器峰值点比较多，共 5 个，见表 6。两个传感器最高峰值点频率并不完全一致，均比较突出的主要是两个频率范围： $16.77 \sim 16.86\text{ Hz}$ 和 $9.14 \sim 9.79\text{ Hz}$ 。

表 5 空气中共振试验振动位移传感器峰值工况频率及幅值

峰值工况频率 f_a/Hz	16.77	14.36	11.57	9.79
峰值工况幅值 μm	1472	356	455	275

表 6 空气中共振试验电涡流位移传感器峰值工况频率及幅值

峰值工况频率 f_a/Hz	16.86	14.36	11.57	9.14	7.24
峰值工况幅值 μm	847	605	525	1201	415

首先是 $16.77 \sim 16.86\text{ Hz}$ 频率范围，振动位移传感器最高峰值点频率为 16.77 Hz ，与右侧悬臂梁计算固有频率 16.91 Hz 非常接近。

其次是 9.14~9.79 Hz 频率范围，电涡流位移传感器的最高峰值点频率为 9.14 Hz，与左侧悬臂梁计算固有频率 9.34 Hz 比较接近，说明该峰值由右侧悬臂梁共振引起。

表 5、表 6 还包含其它 3 个尖峰频率，可能和传感器支架、施振机构等固有频率有关。

表 7 振动位移传感器水中共振峰值工况频率、幅值及空气中共振对应峰值工况频率

峰值工况频率 f_w/Hz	13.62	10.19	9.16	7.33
峰值工况幅值 μm	123	142	93	106
空气中对应工况频率 f_a/Hz	16.77	14.36	11.57	9.79
f_w/f_a	0.81	0.71	0.79	0.75

表 8 电涡流位移传感器水中共振峰值工况频率、幅值及空气中共振对应峰值工况频率

峰值工况频率 f_w/Hz	14.21	10.19	9.16	7.33	4.86
峰值工况幅值 μm	514	284	228	596	101
空气中对应工况频率 f_a/Hz	16.86	14.36	11.57	9.14	7.24
f_w/f_a	0.84	0.71	0.79	0.80	0.67

(2) 水中共振频率特性。水中共振试验的振动峰值远不如空气中突出，尤其是振动位移传感器，已看不出突出的尖峰。振动位移传感器 4 个峰值工况和电涡流位移传感器 5 个峰值工况的水中试验结果分别如表 7、表 8 所示。表 7 和表 8 还列出了空气中共振试验对应峰值工况的空气中共振点频率 f_a ，计算了水中各共振频率 f_w 和其对应的 f_a 之比。

4.2.2 共振工况幅值特性

(1) 共振幅值的比较方法及共振幅值比确定方法。水中共振和空气中共振的幅值特性主要采用两种方式比较，其一用共振峰值绝对值比较，其二则采用共振幅值比 a_r 进行比较。后者所用相对值虽不如前者直接，但由于 a_r 是相对于相同初始值的放大能力，更能反映共振的真实威力或危害。

共振幅值比的确定方法和前述利用自由振动频率反求水中共振幅值比的方法类似，将空气中共振频率 f_a 当做系统固有频率 f_0 计算水中共振频率比 $w_r = f_w/f_a$ ，采用反求法计算水中阻尼及相应的水中共振幅值比 a_r 。与前述方法不同点有两点：① 前述方法利用水中和空气中自由振动频率比 w_r 反求，现阶段方法是利用水中和空气中共振频率比 w_r 反求；② 反求公式不同，前述方法应用式 (13) 计算阻尼比 ξ ，现阶段应用下式计算 (由式 (10) 变换而来)：

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - w_r^2} \quad (14)$$

(2) 振动位移传感器测量的幅值特性。① 采用共振峰值绝对值进行比较。振动位移传感器测量的空气及水中振动试验结果如表 5、表 7 所示。空气中最大共振幅值为 1472 μm ，是水中最大共振幅值 (142 μm) 的 10.4 倍，是对应工况共振幅值 (123 μm) 的 12 倍。② 采用共振幅值比进行比较。

由表 7 可知，振动位移传感器测量的 $f_w/f_a = 0.71 \sim 0.81$ ，将其视作 w_r ，代入式 (14) 可得水中阻尼比 $\xi = 0.352 \sim 0.293$ ，将 ξ 代入式 (11) 可得水中共振幅值比 $a_r = 1.52 \sim 1.78$ 。

(3) 电涡流位移传感器测量的幅值特性。同样采用前述两种方式对电涡流位移传感器测量的水中和空气中共振幅值进行比较。① 共振峰值绝对值比较。电涡流位移传感器测量的空气及水中振动试验结果如表 6、表 8 所示。空气中最大共振幅值为 1201 μm ，是水中最大共振幅值 (596 μm) 的 2.02 倍。之所以水中共振幅值没有像位移传感器一样大幅下降，可能受如下因素影响：a) 传感器支架固定在与振动系统相联通的薄板上，会引起关联振动；b) 支架比较单薄，支架振动幅度大；c) 水中测试时电涡流位移传感器没有被淹没，水的阻尼作用降低，水中支架振动幅值降低较小。② 采用共振幅值比比较。电涡流位移传感器测量的水中共振与空气中共振对应频率比 $w_r = f_w/f_a = 0.67 \sim 0.84$ ，反求的水中阻尼比 $\xi = 0.371 \sim 0.271$ ，换算的水中共振幅值比 $a_r = 1.45 \sim 1.91$ 。

结合水轮机模型转轮通过自由振动频率估算的水中共振幅值比小于 1.17 的结果, 可认为完全淹没在水中的机械设备共振幅值比小于 2, 也就是只比静态初始振动幅值增大不到 1 倍。

5 结论

(1) 线性阻尼单自由度简谐振动共振发生时, 共振频率比、共振幅值比随阻尼比单调变化, 三者呈一一对应关系; 本文据此提出了计算确定水中共振幅值比的反求法: 采用设备水中自由振动频率和空气中自由振动频率之比反求该设备水中阻尼比及共振幅值放大倍数。

(2) 在阻尼不等于 0 的条件下, 共振频率既不等于振动系统固有频率, 也不等于其自由振动频率。

(3) 混流式水轮机模型转轮水中及空气中自由振动频率测试证实, 转轮叶片水中自由振动频率与空气中自由振动频率的最大比值为 0.872, 由此反求的最小水中阻尼比为 0.49, 估算的最小水中共振幅值比为 1.17。

(4) 悬臂梁空气及水中共振试验表明, 水中共振幅值小于空气中共振幅值的十分之一, 水中共振工况频率是空气中对应频率的 0.67~0.84 倍, 借此采用共振频率比反求法计算的水中共振幅值比小于 2。

(5) 水轮机模型转轮水中与空气中自由振动试验及悬臂梁两种状态下真实共振试验都证明, 完全淹没在水中的机械设备在共振状态下对激振幅值的放大作用非常有限。

参 考 文 献:

- [1] 魏墨鑫. 机械振动与机械波[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [2] 闻邦椿, 刘凤翥. 振动机械的理论及应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1980.
- [3] 刘习军, 贾启芬, 张素侠. 振动理论及工程应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [4] 马震岳, 董毓新. 水轮发电机组动力学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003.
- [5] 丁文镜. 自激振动[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [6] 高翔, 卢盛阳, 牟法海, 等. 汽轮发电机组油膜振荡故障诊断和现场处理[J]. 汽轮机技术, 2010, 52(3): 229-231.
- [7] 李启章, 张强, 于纪幸, 等. 混流式水轮机水力稳定性研究[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2014.
- [8] 富田久男. 混流式水轮机的自激振动[C]// 中国科学院. 水轮机水力振动译文集. 北京: 水利电力出版社, 1979: 223-233.
- [9] 克劳福特 C C, 路德 F O. 水轮机的自激振动[C]// 中国科学院. 水轮机水力振动译文集. 北京: 水利电力出版社, 1979: 211-222.
- [10] 傅知春. 船舶主要激振源及避免共振的方法[J]. 船海工程, 2014, 43(9): 1-3.
- [11] 张屹尚, 刘寿, 赵彬, 等. 基于 Kriging 模型的充液管道共振非概率可靠性分析[J]. 振动工程学报, 2012, 25(2): 117-123.
- [12] 梁峰, 包日东, 金莹, 等. 外激励作用下输流管道伴随内共振的非线性振动分析[J]. 振动与冲击, 2014, 33(22): 146-151.
- [13] 黄源芳, 刘光宁, 樊世英. 原型水轮机运行研究[M]. 北京: 中国电力出版社, 2010.
- [14] 李启章. 大朝山电站转轮叶片的卡门涡共振[J]. 水电站机电技术, 2005, 28(4): 76-79.
- [15] THIERRY JAKOB. 混流式水轮机脉动的探讨和数据处理[J]. 国外大电机, 1998(3): 60-67.
- [16] 李胜才. 华威大学正在开发的水力发电创新与技术[C]// 第二届水力发电技术国际会议论文集. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- [17] 吕桂萍, 唐任远. 混流式转轮固有频率分析[J]. 大电机技术, 2006(1): 53-55.
- [18] 朱晓芳, 杜鹏, 金咸定. 浸入水中的船舶尾轴架固有频率计算方法[J]. 振动与冲击, 2005, 24(2): 111-115.
- [19] 朱文若, 高忠信, 陆力, 等. 离心泵叶轮水中固有频率经验下降系数分析及优化[J]. 水利学报, 2013,

44(12): 1455–1461.

- [20] 曹永顺, 姚志峰, 洪益平, 等. 基于单/双向流固耦合的水翼水力阻尼数值预测方法研究[J]. 水利学报, 2020, 51(11): 1432–1439.
- [21] 丁思远. 粘性流体对结构固有频率及阻尼的影响[J]. 郑州轻工业学院学报, 1994, 9(4): 50–54.
- [22] 杨晓军, 李遇春, 刘哲, 等. 水中矩形悬臂梁湿频率的试验与数值识别[J]. 声学及振动, 2018, 6(2): 54–61.
- [23] 徐洪泉, 廖翠林, 王万鹏, 等. 水力机械运行中的拍振和共振问题探讨[J]. 水利学报, 2017, 48(9): 1118–1125.

Research on amplitude and frequency characteristics of resonance of equipment operating in water

XU Hongquan, ZHOU Ye, LIAO Cuilin, CAO Dengfeng, ZOU Zhichao

(*China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China*)

Abstract: In the operation of equipment submerged in water such as hydraulic machinery, faults such as equipment damage caused by severe vibration are often encountered, which are mostly considered to be caused by resonance. Dimensionless treatment is carried out for steady-state vibration solutions of the free vibration and forced vibration equations of the simple harmonic vibration system with single degree of freedom firstly. Then the resonance frequency ratio and resonance amplitude ratio with different damping ratios are calculated and it is found that there is a one-to-one corresponding monotonically varying relation between three ratios. A reverse estimation method is proposed and that is to measure the free vibration frequency of equipment in water and air respectively, assume the free vibration frequency in air is the natural frequency, and then determine the damping ratio and resonance amplitude ratio in water. The research uses the hammering method to measure the free vibration frequency of the model Francis turbine runner in water and air. It is found that the free vibration frequency in water is lower than that in air, and the ratio of the first-order free vibration frequency in water to that in air is about 0.758~0.872. If this value is assumed to be the free vibration frequency ratio in water, the corresponding damping ratio in water can be calculated to be 0.652~0.490, and the amplification ratio of the resonance amplitude is about 1.01~1.17. In this study, the real resonance test of the cantilever beams fixed in the middle was also carried out in air and water. Obvious resonance occurs near the calculated natural frequency of the cantilever beam during vibration test. During the vibration test in water, it was also found that the resonance frequency was significantly lower than that in the air. The ratio of resonance amplitude in the water obtained by the reverse method was less than 2, and the magnification of resonance amplitude in the water to the initial vibration amplitude in the air was also very small. It further indicates that the amplification of resonance to excitation amplitude is very limited.

Keywords: turbine runner; cantilever beam; resonance; free vibration; natural frequency; damping; vibration amplitude

(责任编辑: 王 婧)